Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 9: Stetigkeit

Stichworte: Intervalle, Stetigkeit, Folgenkriterium, Stetigkeitssätze, Polynome und rationale Funktionen, Eigenschaften stetiger Funktionen, Zwischenwertsatz, Satz vom Minimum/Maximum [Hoff. §2.1, 3.4.2]

9.1. **Einleitung:** Wir definieren Intervalle und untersuchen Grundeigenschaften reeller Funktionen. Dies führt uns auf den Stetigkeitsbegriff und deren Eigenschaften, etwa dass stetige Funktionen Intervalle auf Intervalle abbilden – eine Folgerung des ZWS.

9.2 **Intervalle** sind zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$, d.h. $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: $x, y \in I,\ x<y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R},\ x<z<y:\ z \in I$. ⊛

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ bezeichnen wir

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ "abgeschlossenes IV"

$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ "offenes IV"

$\left.\begin{array}{l}]a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\} \\ [a,b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} \end{array}\right\}$ "halboffene IVe"

als beschränkte IVe, neben diesen bezeichnen wir noch unbeschränkte IVe mit:

halboffen $\left\{\begin{array}{l} [a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}, \\ ]-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}, \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l}]a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ x > a\} \\ ]-\infty,a[:= \{x \in \mathbb{R};\ x < a\} \\ ]-\infty,\infty[:= \mathbb{R}. \end{array}\right\}$ offen

Aufgrund der Axiome von $\mathbb{R}$ haben diese Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Eigenschaft ⊛.

9.3. **Bsp.:**

- reelle ε-Umgebungen sind IVe: $\mathcal{U}_a^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R};\ |x-a| < \varepsilon\} =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.
- beschränkte offene IVe sind ε-Umgebungen: $]a,b[=]\frac{a+b}{2}-\varepsilon, \frac{a+b}{2}+\varepsilon[= \mathcal{U}^\varepsilon_{(a+b)/2}$ mit $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.
- $]2,10[\cap [7,15[= \{x \in \mathbb{R};\ 2<x<10 \wedge 7 \leq x < 15\} = [7,10[$.

9.4. **Vereinbarung:** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine (reellwertige) Funktion.

Typischerweise ist D ein Intervall, muss aber nicht, wie z.B. $f: \overbrace{\mathbb{R} \setminus \{1\}}^{\text{kein IV}} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x-1}$.

Sei $x_0 \in D$ ein Element des Definitionsbereichs von f, dieses ist also eine reelle Zahl.

Wir wollen untersuchen, ob f nahe x_0 "steigt" oder "fällt", also in einer ε-Umgebung von x_0 "steigt" oder "fällt". Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$.

9.5 **Def.:** Für $T \subseteq D$ nennen wir f (etwa $T = \mathcal{U}^{\varepsilon}_{x_0}$)

- streng isoton in T / streng monoton wachsend in T, falls $\forall x_1, x_2 \in T, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$.
- isoton in T / monoton wachsend in T, falls $\forall x_1, x_2 \in T, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.
- streng antiton in T / streng monoton fallend in T, falls $\forall x_1, x_2 \in T, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$.
- antiton in T / monoton fallend in T, falls $\forall x_1, x_2 \in T, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$.

9.6. **Umformulierung:** In 9.5 gilt: • f streng isoton in $T \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in T, x_1 \neq x_2 : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, • f isoton in $T \Leftrightarrow \ldots \geq 0$, • f streng antiton in $T \Leftrightarrow \ldots < 0$, • f antiton in $T \Leftrightarrow \ldots \leq 0$.

Bez.: Den Bruch $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ nennen wir Differenzenquotient.

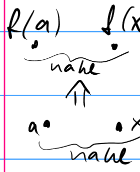
9.7 **Def.:**
- $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt gerade, falls $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$, und ungerade, falls $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$.
- $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, falls $\forall x \in D : f(x+p) = f(x)$.
- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt durch $\alpha \in \mathbb{R}$ nach $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{smallmatrix} \right\}$ beschränkt, falls $\forall x \in D : f(x) \left\{ \begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} \right\} \alpha$.
- f heißt nach $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{smallmatrix} \right\}$ beschränkt, falls $\exists \alpha \in \mathbb{R} : f$ durch α nach $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{smallmatrix} \right\}$ beschränkt; und gilt beides, so heißt f beschränkt.

9.8. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{K}$ sei eine Funktion.

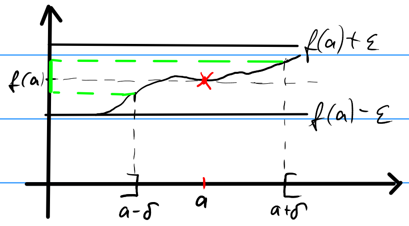
Def.: Die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt stetig in $a \in D$, falls gilt:

$$(*) \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |x - a| < \delta, \ x \in D \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.}$$

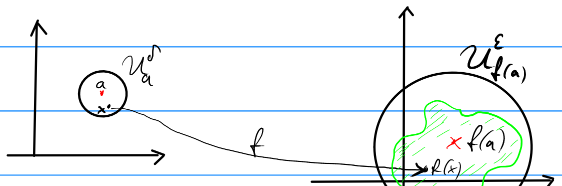
Skizzen:



$D = \mathbb{R}$:



$D = \mathbb{C}$:



$f(\mathcal{U}^{\delta}_{a} \cap D) \subseteq \mathcal{U}^{\varepsilon}_{f(a)}$

(*) besagt, dass die Funktionswerte $f(x)$ für x nahe a beliebig nahe an $f(a)$ "heranrücken".

9.9. $(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}^{\delta}_{a} \cap D : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}^{\delta}_{a} \cap D : f(x) \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{f(a)}$.

$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f(\mathcal{U}^{\delta}_{a} \cap D) \subseteq \mathcal{U}^{\varepsilon}_{f(a)}$

9.10. **Def.:** f heißt stetig in D, falls f in allen Punkten $a \in D$ stetig ist.

9.11. **Bsp.:**

(1) $f(x) \equiv b \in \mathbb{R}\ \forall x \in D$: f ist stetig in $a \in D$ für alle $a \in D$.

⌜Für $\varepsilon > 0$ ist $\delta(\varepsilon)$ beliebig wählbar.⌟

(2) $a \in D$ sei isolierter Punkt von D, d.h. $\exists \eta > 0 : \mathcal{U}_a^\eta \cap D = \{a\}$.

Dann ist jede Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ stetig in a.

(Für $\varepsilon > 0$ ist $\delta(\varepsilon) = \eta$ zulässig.)

(3) $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig.

⌜Für $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ ist $\delta(\varepsilon) := \varepsilon$ zulässig, denn: $\big||x| - |a|\big| \le |x-a| < \varepsilon$.⌟

(4) $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x$ ist stetig.

⌜Zu $\varepsilon > 0$ ist $\delta(\varepsilon) := \varepsilon$ zulässig.⌟

(5) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}_{\ge 0}$, $f(x) = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist f stetig.

Bew.: Zeige: $0 \le x \le y \Rightarrow 0 \le \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \le \sqrt[k]{y-x}$:

⌜Sei OE $x < y$, setze $b := \sqrt[k]{y}$, $a := \sqrt[k]{x}$ $\Rightarrow b > a$.

Es ist $b^k = (a + (b-a))^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j \underbrace{(b-a)}_{>0}{}^{k-j} \ge a^k + (b-a)^k$.

$\Rightarrow y - x = b^k - a^k \ge (b-a)^k = (\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x})^k$

$\Rightarrow \sqrt[k]{y-x} \ge \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \ge 0$.⌟

Somit ist für $\varepsilon > 0$ dann $\delta(\varepsilon) := \varepsilon^k$ zulässig. ⌜$|f(y) - f(x)| \le \sqrt[k]{y-x} \le (\varepsilon^k)^{\frac{1}{k}} = \varepsilon$⌟ $\square$

9.12. **Monster 1:** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R} = D$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Dann ist f in keinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig.

9.13. **Def.:** $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt dicht in $\mathbb{R}$, wenn $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \delta > 0 : A \cap \mathcal{U}_x^\delta \neq \emptyset$,

d.h. jedes $\mathcal{U}_x^\delta$ enthält Werte aus A.

Bsp.: $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ Ü Warum?

9.14. **Bew.** von 9.12:

Sei $a \in \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) $\overset{\mathbb{Q},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ dicht in } \mathbb{R}}{\Rightarrow}$ $\forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{Q}$) mit $x \in \mathcal{U}_a^\delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(a)| = 1 \Rightarrow$ Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es kein zulässiges $\delta(\varepsilon) > 0$. $\square$

9.15. **Monster 2:** $f : D = \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q(x)}, & x \in \mathbb{Q}, \text{ wobei } x = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ mit } \underbrace{p(x)}_{\in \mathbb{Z}}, \underbrace{q(x)}_{\in \mathbb{N}} \text{ teilerfremd,} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Dann gilt: f ist stetig in allen $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,
f ist unstetig in allen $a \in \mathbb{Q}$.

Bew.: i): $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(a) > 0$. Aber $\forall \delta > 0\ \exists x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \mathcal{U}_a^\delta$.
$\Rightarrow |\underbrace{f(x)}_{=0} - f(a)| = |f(a)|$ für $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap \mathcal{U}_a^\delta$.
$\Rightarrow$ Für $\varepsilon = |f(a)|$ gibt es kein zulässiges $\delta(\varepsilon)$.

ii): $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also $f(a) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$, wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Setze $\delta(\varepsilon) = \delta = \min\{|a - \frac{m}{n!}|;\ m \in \mathbb{N}\} > 0$.
Sei $|x - a| < \delta \Rightarrow$ 1.) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. ✓
2.) $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$: $x \notin \frac{1}{n!} \cdot \mathbb{N} \Rightarrow q > n$.
⌜Denn: $x = \frac{(q-1)!\,p}{q!}$, wäre $q \leq n$, ließe sich so erweitern, dass im Nenner $n!$ stünde.⌟
Somit: $|f(x) - f(a)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon$. □

9.16. **Satz:** Die Funktionen $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $k(z) = \bar{z}$ sind stetig, denn: $|\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)| = |\mathrm{Re}(z_1 - z_2)| \leq |z_1 - z_2|$,
analog für Im, und $|k(z_1) - k(z_2)| = |k(z_1 - z_2)| = |\overline{z_1 - z_2}| = |z_1 - z_2|$.
(Für $\varepsilon > 0$ ist $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ zulässig.)

9.17. **Satz:** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig (vgl. Bem. (4) in 8.6.).

9.18. **Folgenkriterium:** Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{K}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ ist stetig in $a \in D$ genau dann, wenn gilt:
$$\forall (z_n) \in \mathcal{F},\ z_n \in D\ \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a).$$

Bew. (ausführlich):
„$\Rightarrow$": Sei f stetig in a, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a)$.
Sei $\varepsilon > 0$ $\overset{f\text{ st. in } a}{\Longrightarrow}$ $\exists \delta > 0 : f(\mathcal{U}_a^\delta \cap D) \subseteq \mathcal{U}_{f(a)}^\varepsilon$
$\overset{z_n \to a}{\Longrightarrow}$ $\exists n_0 = n_0(\delta)\ \forall n \geq n_0 : |z_n - a| < \delta$ bzw. $z_n \in \mathcal{U}_a^\delta$.
$\Rightarrow f(z_n) \in \mathcal{U}_{f(a)}^\varepsilon$ f.a. $n \geq n_0$, d.h. $|f(z_n) - f(a)| < \varepsilon$ f.a. $n \geq n_0$.

„$\Leftarrow$": Ann.: Sei f nicht stetig in $a\in D$,
d.h. $\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0 : f(\mathcal{U}_a^\delta \cap D) \not\subseteq \mathcal{U}_{f(a)}^\varepsilon$.
$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ \exists z_n \in \mathcal{U}_a^{1/n} : f(z_n) \notin \mathcal{U}_{f(a)}^\varepsilon$,
also: $|f(z_n)-f(a)| \geq \varepsilon$ f.a. $n\in\mathbb{N}$ und wo $|z_n-a|<\frac{1}{n}$.
Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, aber $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(a)$. □

9.19. **Def.:** Seien $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen, $c\in\mathbb{R}$.
Dann setzt man:
$D_{f\pm g} := D_f \cap D_g$, $(f\pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$, ⤳ def. $f\pm g$
$D_{cf} := D_f$, $(cf)(x) := c\,f(x)$, ⤳ def. cf
$D_{\frac{1}{g}} := \{x\in D_g ; g(x) \neq 0\}$, $(\frac{1}{g})(x) := \frac{1}{g(x)}$, ⤳ def. $\frac{1}{g}$
$D_{\frac{f}{g}} := D_f \cap D_{\frac{1}{g}}$, $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$. ⤳ def. $\frac{f}{g}$

9.20. **Satz:** Es gilt:
1) f stetig in $a\in D_f \Rightarrow cf$ stetig in a.
2) f,g stetig in $a\in D_{f\pm g} \Rightarrow f\pm g$ stetig in a.
3) g stetig in $a\in D_{1/g} \Rightarrow \frac{1}{g}$ stetig in a.
4) f,g stetig in $a\in D_{f/g} \Rightarrow \frac{f}{g}$ stetig in a.

Bew.: Benutze das Folgenkriterium für die Stetigkeit in $a\in D$ und die Eigenschaften von Grenzwerten von Folgen. □

9.21. **Bsp.:** 1) (a_n) reelle Folge, $a_n \geq 0$, $a_n \to a \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[k]{a}$, da $f(x)=\sqrt[k]{x}$ stetig
2) sin, cos stetig.
3) Trivialität: Sei $D_f \supseteq D \ni a$. Dann: f in a stetig $\Rightarrow f_{|D}$ in a stetig.
4) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow f_{|\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig.

9.22. **Def.:** Die Hintereinanderausführung / Verkettung / Komposition zweier Funktionen
$f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subseteq D_g$
ist die Funktion $g\circ f : D_f \to \mathbb{R}$, $g\circ f(x) := g(f(x))$.
Wir bezeichnen so das Einsetzen einer Funktion in eine andere.
Für $g\circ f$ sprich "g nach f": erst f, dann g anwenden. Anschaulich:

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & f(D_f)\subseteq D_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

9.23. Zur Stetigkeit der Komposition / Hintereinanderausführung von Funktionen:
Sei $a \in D_f \xrightarrow{f} D_g \xrightarrow{g} \mathbb{K}$, f in a stetig, g in $f(a)$ stetig.
Dann ist $g \circ f$ in a stetig.

Bew.: $a_n \to a$ in $D_f \underset{f\,st.}{\Rightarrow} f(a_n) \to f(a)$ in $D_g \underset{g\,st.}{\Rightarrow} g(f(a_n)) \to g(f(a))$ in $\mathbb{K}$. □

Bsp.: $f(z) = \sqrt[37]{\exp(|\cos(2z^2+16)|)}$ ist stetig

9.24. Polynomfunktionen: Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.
Polynom: $\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, X: Unbestimmte
$\Downarrow$
Polynomfunktion: $\mathbb{K} \ni z \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \in \mathbb{K}$.

Bezeichnung: $\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ist
- Polynom
- Polynomfunktion
- Wert der Polynomfunktion an der Stelle z.

Polynome sind stetig.

9.25 Rationale Funktionen: P, Q seien Polynome, $Q \neq 0$.
$R := \frac{P}{Q} : D_{\frac{P}{Q}} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ heißt rationale Funktion, ist stetig.

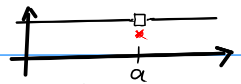
9.26 Zusätzliche Stetigkeitsaussagen über $\mathbb{R}$

Vor.: $a \in D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, f stetig.

Beh.: 1) $f(a) > \gamma \Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f \cap U_a^\delta : f(x) > \gamma$.
2) $f(a) < \gamma \Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f \cap U_a : f(x) < \gamma$.

Bew.: 1): Sei $\varepsilon := f(a) - \gamma > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(a) - f(x) \leq |f(a) - f(x)| < f(a) - \gamma$
für alle $x \in U_a^\delta \cap D_f$. $\Rightarrow f(x) > \gamma$.
2): Sei $\varepsilon := \gamma - f(a) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) - f(a) \leq |f(x) - f(a)| < \gamma - f(a)$
für alle $x \in U_a^\delta \cap D_f$. $\Rightarrow f(x) < \gamma$. □

9.27 **Bem.:** Die Beh. ist notwendig, aber nicht hinreichend:
Bsp. für f unstetig mit 1) ist



9.28. **Def.:** f mit 1) heißt oberhalb stetig, f mit 2) heißt unterhalb stetig.

9.29. **Zwischenwertsatz (ZWS):**

Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, sei $f(a) < z < f(b)$.

Beh.: $\exists\, c \in\,]a,b[$ mit $f(c) = z$.

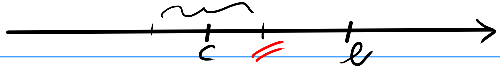
Bew.: Sei $c := \sup\{x\in[a,b];\ f(x)\le z\}$.

Diese Menge ist n.o. beschränkt und $\neq\emptyset$.

Es gilt: $f(c) \overset{!}{=} z$.

Sonst: a) falls $f(c) < z$: 9.26(2) $\Rightarrow \exists\,\delta>0\ \forall x\in[a,b]\cap\mathcal{U}_c^\delta : f(x) < z$

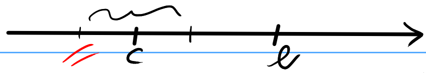
$c\neq b \Rightarrow [c-\delta, c+\delta] \subseteq \{x\in[a,b];\ f(x)\le z\}$.



↯ zu $c = \sup\{x\in[a,b];\ f(x)\le z\}$.

b) falls $f(c) > z$: 9.26(1) $\Rightarrow \exists\,\delta>0\ \forall x\in[a,b]\cap\mathcal{U}_c^\delta : f(x) > z$

$c\neq b \Rightarrow [c-\delta, c+\delta] \nsubseteq \{x\in[a,b];\ f(x)\le z\}$.



↯ zu $c = \sup\{x\in[a,b];\ f(x)\le z\}$. □

9.30. **Satz vom Minimum und Maximum:**

Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig.

Beh.: $\exists\, t_1, t_2 \in [a,b]\ \forall x\in D_f : \underbrace{f(t_1)}_{\text{Minimum}} \le f(x) \le \underbrace{f(t_2)}_{\text{Maximum}}$

Bew.: (Für t_2, sonst $f \rightsquigarrow -f$):

Sei $s := \sup f([a,b])$, dies existiert (d.h. $s\neq\infty$).

⌜Sonst $\exists\,(x_n)\subseteq[a,b] : f(x_n) > n$, OE $x_n\to x_0\in[a,b]$ ⌜Bolzano-Weierstraß⌟

Da f stetig, gilt $f(x_n)\to f(x_0)$, also $(f(x_n))$ beschränkt im ↯ zu $f(x_n) > n$.⌟

Weiter $\exists\, f(x_n) = y_n \subseteq f([a,b])$, $y_n \to s$, OE $x_n\to x_0\in[a,b]$.
⌜B.-W.⌟

Kürzer so:
Haben:
$\underset{f(x_n)}{\overset{\shortparallel}{y_n}} \longrightarrow s$ … $f(x_n)\longrightarrow f(x_0)$,
da $x_n\to x_0$ und f stetig.
Wegen Eind. des GW folgt $s = f(x_0)$,
Somit ist
$\forall x\in[a,b] : f(x)\le s = f(x_0)$,
also: $f(x_0)$ ist Max. von $f \rightsquigarrow$ setze $t_2 := x_0$. ✓

Beh.: $s \overset{!}{=} f(x_0) = f(t_2)$ Bew.: Zu zeigen: $s\le f(x_0)$.

Für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ gilt nun: Falls $f(x_0) < \alpha$,
so ist $f(x_n) < \alpha$ für große n, also $s\le\alpha$. } ☒

Es folgt $s\le f(x_0)$.

⌜Sonst: $f(x_0) < s \Rightarrow d := s - f(x_0) > 0$, $\alpha := f(x_0) + \frac{d}{2}$.

$\Rightarrow f(x_0) < \underbrace{f(x_0)+\frac{d}{2}}_{\alpha} \overset{☒}{\Rightarrow} s \le \underbrace{f(x_0)+\frac{d}{2}}_{\alpha} \Rightarrow s \le f(x_0) + \frac{s}{2} - \frac{f(x_0)}{2}$

$\Rightarrow \frac{s}{2} \le \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow s \le f(x_0)$, ↯ zur Ann.⌟ □

9.31 **Folgerung:** In 9.30 ist $f([a,b])$ ein Intervall laut 9.29/9.30.

$\rightsquigarrow$ stetige Bilder von IVen sind IVe!