Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

Literatur:

- Hier und im gesamten Skript steht [Hoff] für das Buch Dieter Hoffmann: Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure, s. auch die Literaturangaben auf der Webseite der Vorlesung zur Analysis I. In diesem Buch finden Sie bestimmte Skriptteile ausführlicher aufgeschrieben.
- Ausführlicheres zu eher speziellen Themen der Analysis steht in: H. Heuser, Lehrbuch der Analysis.

Kapitel:

An1: Mathematische Grundlagen

[Hoff], Kapitel 1.1 – 1.3 und 1.5 auf S. 30–33.

Stichworte: Mengen, Aussagen, Quantoren, Abbildungen, vollständige Induktion

Beschreibung: Wir stellen die grundlegensten Begriffe der Mathematik dar, die aus der Aussagenlogik und naiven Mengenlehre stammen. Wir führen Abbildungen und ihre wichtigsten Eigenschaften ein, und erklären das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

An2: Die reellen Zahlen

[Hoff], S. 33–38, § 1.4.1 – 1.4.3.

Stichworte: Körperaxiome, Anordnung/positive Zahlen, Rechenregeln für Ungleichungen, Beträge, rekursive Definitionen, Σ/Π-Zeichen, $n!$, a^n, Bernoulli-Ungleichung, Binomialkoeffizienten, binomischer Satz

Beschreibung: Wir führen die reellen Zahlen axiomatisch ein. Die grundlegendsten Rechenregeln werden aus den Axiomen hergeleitet, speziell für Ungleichungen, die für die Analysis eine besondere Rolle spielen. Abkürzungen für besondere reelle Zahlen werden eingeführt, wie z.B. Summen/Produkte/Potenzen, Fakultäten und die Binomialkoeffizienten, für die der binomische Satz gilt.

An3: Rationale und irrationale Zahlen

[Hoff] §1.6-1.8

Stichworte: rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, Vollständigkeit/Archimedes-Eigenschaft, Wohlordnungssatz, Satz von der n-ten Wurzel, geometrische Summe, Dezimalbruchdarstellung

Beschreibung: Wir definieren die reellen Zahlen und die Begriffe im Vollständigkeitsaxiom (V). Die Archimedes-Eigenschaft folgt aus (V), und liefert etwa den Wohlordnungssatz. Demnach liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, und wir können die n-te Wurzel einer Zahl definieren. Weiter kann man reelle Zahlen als Dezimalbruch darstellen; zum Beweis wird die Formel von der geometrischen Summe benötigt.

An4: Komplexe Zahlen

[Hoff, §1.9]

Stichworte: Konstruktion, imaginäre Einheit, Rechenregeln, komplex konjugiertes, Betrag, beschränkte Menge, komplexe Ebene, Real- und Imaginärteile

Beschreibung: Wir führen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Paare reeller Zahlen ein. Mit der richtigen Definition für + und · ist $\mathbb{C}$ ein (kommutativer) Körper, in dem die Gleichung $x^2=-1$ zwei Lösungen hat. Wir erweitern so den Körper der reellen Zahlen. Die wichtigsten Rechenregeln für $\mathbb{C}$ werden notiert.

An5: Folgen

[Hoff, §3.1.1-3]

Stichworte: Folgen, beschränkte Folgen, Nullfolgen, Konvergenz/Divergenz, Monotonie, Cauchy-Folgen, Grenzwertsätze/Sandwichlemma

Beschreibung: Wir behandeln reell- oder komplexwertige Folgen. Über beschränkte Folgen und Nullfolgen gelangen wir zum Konvergenzbegriff.

An6: Teilfolgen, Eigenschaften von Folgen [Hoff, §3.1.4/5]

Stichworte: Teilfolgen, Bolzano-Weierstraß, Vollständigkeitssatz, bestimmte Divergenz, Häufungswerte, limsup und liminf

Beschreibung: Die Untersuchung konvergenter Teilfolgen von u.U. divergenten Folgen führt zum Satz von Bolzano-Weierstraß. Wir erhalten, dass $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ vollständig ist in dem Sinne, dass jede Cauchyfolge konvergiert. Wir diskutieren auch bestimmte Divergenz, den Limes superior und Limes inferior.

An7: Reihen [Hoff, §3.2]

Stichworte: Reihen-Konvergenzsätze, Cauchy-Kriterium, alternierende Reihen/Leibniz-Kriterium, Majoranten-/Wurzel-/Quotienten-Kriterium, Umordnungssatz, Cauchy-Produktsatz

Beschreibung: Reihen sind spezielle Folgen, die aus einer „Summanden“folge gebildet werden. Wir behandeln verschiedene Kriterien zu ihrer Konvergenz. Der Cauchy-Produktsatz besagt, wie das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen gebildet wird.

An8: Die Funktionen exp, cos, sin, Teil I [Hoff, §3.3.2, S. 134-6]

Stichworte: Exponentialreihe, Winkelfunktionen, Eigenschaften, Zahl e, Funktionen sin/cos, Additionstheoreme

Beschreibung: Wir tragen die wichtigsten Eigenschaften der (komplexen) Exponentialfunktion zusammen. Die Funktionen, die als Real- und Imaginärteil davon erklärt werden, sind die Winkelfunktionen Cosinus und Sinus. Sie gelten als Prototyp für die Beschreibung von Schwingungen und haben etliche Eigenschaften, z.B. die Additionstheoreme.

An9: Stetigkeit [Hoff, §2.1, 3.4.2]

Stichworte: Intervalle, Stetigkeit, Folgenkriterium, Stetigkeitssätze, Polynome und rationale Funktionen, Eigenschaften stetiger Funktionen, Zwischenwertsatz, Satz vom Minimum/Maximum

Beschreibung: Wir definieren Intervalle und untersuchen Grundeigenschaften reeller Funktionen. Dies führt uns auf den Stetigkeitsbegriff und deren Eigenschaften, etwa dass stetige Funktionen Intervalle auf Intervalle abbilden – eine Folgerung des ZWS.

An10: Funktionsgrenzwerte [Hoff, §3.4.1, §4.8]

Stichworte: Grenzwert einer Funktion, Links-/Rechtsseitiger Limes, gleichmäßige Stetigkeit, Satz über Umkehrfunktionen, Logarithmus

Beschreibung: Für einen Häufungspunkt a im Definitionsbereich einer Funktion f definieren wir den Funktionsgrenzwert von $f(x)$ für $x \to a$. Mit der zusätzlichen Bedingung $x > a$ ist dies der rechtsseitige Limes, für $x < a$ der linksseitige. Bestimmte Divergenz kann entsprechend definiert werden. Weiter führen wir den Logarithmus ein.

An11: Differenzierbarkeit [Hoff, §4.1–§4.3]

Stichworte: differenzierbar, Kriterien für Diff'barkeit, Tangenten, Ableitungsregeln, höhere Ableitungen

---

An12: Reelle Differenzierbarkeit [Hoff, §4.4, §4.8, §4.11, §6.3]

Stichworte: Umkehrfunktionen ableiten, lokales Min/Max/Extremum, Satz von Rolle, verallgemeinerter MWS, Monotoniekriterien, Satz von Darboux, Regel(n) von de l'Hôpital

Beschreibung: Wir zeigen einen Satz zur Ableitung von reellen Umkehrfunktionen. Die Zusammenhänge zwischen Extremwerte/Monotonie und Ableitung(svorzeichen) erschließen sich. Es folgt der Satz von Rolle, der Mittelwertsatz, und ein Satz von Darboux. Zuletzt behandeln wir die Regel(n) von de l'Hôpital.

An13: Extremwertsuche, Konvexität [Hoff, §4.11.1/2]

Stichworte: hinreichende Bedingungen für lokale Extrema und Vorzeichen der ersten und zweiten Ableitung, Konvexität und Isotonie der Ableitung, Jensensche Ungleichung

Beschreibung: Wir besprechen Anwendungen der zweiten Ableitung: das sind hinreichende Kriterien zur Extremwertsuche bei reellen Funktionen sowie ein Kriterium zur Überprüfung der Konvexität/Konkavität einer reellen Funktion.

An14: Spezielle Winkelfunktionen, exp/cos/sin Teil II

Stichworte: Kreiszahl π, Winkelberechnung, tan, arctan, cotan, arccot, hyperbolische Funktionen, Polarkoordinatendarstellung [Hoff, §4.8, 4.12]

Beschreibung: Wir def. $\frac{\pi}{2}$ als die kleinste positive Nullstelle der reellen Cosinusfunktion. Winkel werden im Bogenmaß gemessen, und π entspricht dem Halbkreiswinkel. Wir behandeln noch weitere, spezielle Winkelfunktionen und hyperbolische Funktionen.

An15: Das Riemann-Integral [Hoff, §5.2.1/2]

Stichworte: Unterteilung, Treppenfunktion, (Riemann-) Integrierbarkeit, Kriterien, Eigenschaften integrierbarer Fktn. und des (bestimmten) Integrals

Beschreibung: Ausgehend von der Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken als Produkt der Seitenlängen soll eine Methode zur Berechnung des Flächeninhalts allgemeinerer (insbesonderer krummlinig begrenzter) Flächen wie z.B. der Kreis gewonnen werden. Als Methode dient die Ausschöpfung von innen und außen durch endlich viele (nichtüberlappende) Rechtecke.

An16: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

[Hoff §52]

Stichworte: Stammfunktionen, partielle Integration, Substitutionsregel, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), Integralfunktionen, Integraltafel, Hauptsatzkantate

Beschreibung: Wir betrachten Stammfunktionen und leiten Rechenregeln dafür her. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) liefert die Verbindung zwischen Stammfunktionen (den unbestimmten Integralen) und den Riemann-Integralen (den bestimmten Integralen), und damit erhalten wir einfachere Möglichkeiten zur konkreten Berechnung bestimmter Integrale (als im vorigen Kapitel).

An17: Stammfunktionen rationaler Funktionen

Stichworte: Stammfunktionen rationaler Funktionen, Polynomdivision, Nullstellenabspaltung, Hauptsatz der Algebra, Partialbruchzerlegung

Beschreibung: Wir beschreiben eine Methode zur Auffindung von Stammfunktionen rationaler Funktionen der Form $\frac{p}{q}$ mit Polynomen $p, q \in \mathbb{C}[z]$. Nach Polynomdivision genügt es, den Fall $\deg p < \deg q$ zu betrachten. Dann wird q als Produkt von Linearfaktoren geschrieben, nach einer Partialbruchzerlegung wird die S.F. gefunden.

An18: Funktionenfolgen, Potenzreihen

[Hoff, §3.3]

Stichworte: Supremumsnorm, gleichmäßige/punktweise Konvergenz, Majorantenkriterium von Weierstraß, Potenzreihen, Konvergenzradius

Beschreibung: Wir führen die Supremumsnorm ein und damit die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolge, welche im Vergleich zur punktweisen Konvergenz stärker ist. Potenzreihen werden als Beispiel für Funktionenfolgen auf (gleichmäßige) Konvergenz hin untersucht.

An 19: Taylorreihen [Hoff, §6.2]

Stichworte: Satz von Taylor, 1. MWS der ∫-Rechnung, Lagrange-Restglied, Potenzreihenentwicklungen in Beispielen

Beschreibung: Manche Funktionen lassen sich als Potenzreihe darstellen. Wie man eine solche Potenzreihendarstellung finden kann, liefert der Satz von Taylor zur Entwicklung von Funktionen in eine Potenzreihe. Wie gut die Approximation mit den ersten n Gliedern der Potenzreihe ist, besagen Abschätzungen des zugehörigen Restglieds.

An 20: Uneigentliche Integrale [Hoff, §5.3]

Stichworte: uneigentliches Integral, Integrierbarkeitskriterien, Integralkriterium für Reihenkonvergenz, Abschätzung der harmonischen Reihe

Beschreibung: bisher wurden nur beschränkte Integranden zur Integration betrachtet. Wir wollen nun auch unbeschränkte Integranden und sogar unbeschränkte Integrationsintervalle zulassen. Man spricht dann von uneigentlichen Integralen; diese können existieren oder nicht. Bestimmte Konvergenzkriterien liefern die Existenz.

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An1: Mathematische Grundlagen

Stichworte: Mengen, Aussagen, Quantoren, Abbildungen, vollständige Induktion

---

Literatur: [Hoff], Kapitel 1.1 – 1.3 und 1.5 auf S. 30–33.
Hier und im gesamten Skript steht [Hoff] für das Buch
Dieter Hoffmann: Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure,
s. auch die Literaturangaben auf der Webseite der Vorlesung zur Analysis I.
In diesem Buch finden Sie bestimmte Skriptteile ausführlicher aufgeschrieben.

1.1. Bedienungsanleitung der Vorlesung "Analysis I":

- Vor jedem Termin erscheint auf der Webseite kurzfristig ein neues Kurz-Skriptteil zur nächsten Vorlesungssitzung. Sie können einen Vorab-Blick hineinwerfen.
- Besuchen Sie unbedingt die Vorlesungstermine! Das Skript wird dort ausführlich erklärt, erläutert, entwickelt und veranschaulicht. Der Stoff ist ohne den zugehörigen mündlichen Ergänzungen nicht zu erfassen.
- Lesen Sie zusätzlich ergänzende Literatur im Selbststudium, etwa die angegebene Literatur, was hier häufig das Buch [Hoff] ist.
- Überlegen Sie selbständig die angegebenen Übungsvorschläge, die mit dem Übungssmiley (ü) markiert sind. Sprechen Sie mit anderen darüber.
- Besuchen Sie regelmäßig das Tutorium/Ihre Übungsgruppe, um weitere Beispiele kennenzulernen und fleißig zu üben.
- Pro Kapitel finden Sie einen ausführlich aufgeschriebenen Beweis.
- Das Skript enthält einen Farbcode: gelb für Notationen/Bezeichnungen, rot unterstrichen werden Begriffdefinitionen und Namen wichtiger Sätze, blau unterstrichen werden Referenznummern und Zitierungen, grün unterstrichen werden Behauptungen/Sätze/Lemmas/Korollare, orange unterstrichen werden wesentliche Beweisideen.

1.2. **Einleitung:** Wir stellen die grundlegensten Begriffe der Mathematik dar, die aus der Aussagenlogik und naiven Mengenlehre stammen. Wir führen Abbildungen und ihre wichtigsten Eigenschaften ein, und erklären das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

1.3. **Def.:** Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. (G. Cantor 1895)
Die Objekte heißen Elemente. Notation: $x \in M$, bzw. $x \notin M$ (für das Gegenteil von $x \in M$)

1.4. **Bsp.:** $\{a, b, \dots, z\}$ lateinisches Alphabet, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen,
$\{$rot, grün, blau$\}$ einige Farben, $1 \in \mathbb{N}$ ist wahr, $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ ist falsch

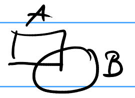
$M := \{\dots\}$ eine Menge ist durch ihre Elemente definiert.
Die Menge ohne Elemente heißt leere Menge, Notation: $\emptyset$

1.5. **Bem.:** $A = B :\Leftrightarrow$ A enthält genau dieselben Elemente wie B, (und umgekehrt). Bsp.: $\{1, 3, 7\} = \underbrace{\{3, 1, 1, 7, 1, 3, 1\}}_{\text{Reihenfolge und Mehrfachnennung irrelevant}}$.

1.6. **Das Herstellen von neuen Mengen aus Mengen:**

a) Aussondern: $T := \{a \in A;\ a \text{ hat Eigenschaft } E\}$

b) aus Mengen A und B lassen sich bilden:



$A \cap B = \{x \in A;\ x \in B\}$ (Schnittmenge)

$A \cup B = \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$ (Vereinigungsmenge)

$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$ (Differenzmenge)

$A \subseteq B$: $\forall a \in A: a \in B$, entspricht $B \supseteq A$ (Teilmengenzeichen) $\ulcorner a \in A \Rightarrow a \in B \lrcorner$

$A \subsetneq B$: $A \subseteq B \wedge A \neq B$ (echte Teilmenge)

c) Potenzmenge von A: $\mathcal{P}(A) := \{B;\ B \subseteq A\}$ (Menge aller Teilmengen von A)
$\mathcal{P}(\emptyset) := \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Bsp.: $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
$\{1\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$, $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$
$\{\{1\}\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2\})$

d) **Produktmenge**: $A \times B := \{(a,b);\ a \in A,\ b \in B\}$

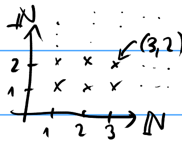
kartesisches Produkt ↑ ↑ geordnete Paare

⌐ andere Darstellung: $\binom{a}{b}$ statt (a,b) ⌙

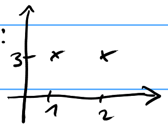
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d$ ← Reihenfolge relevant

Bsp.:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:



$\{1,2\} \times \{3\}$:



Haben $\{1,2\} \times \{3\} = \{(1,3),\ (2,3)\}$,

$\{2,3\} \times \{\pi, 1, 7\} = \{(2,\pi), (2,1), (2,7),$
$(3,\pi), (3,1), (3,7)\}$

Haben $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots,$
$(2,1), (2,2), (2,3), \ldots,$
$(3,1), \ldots$
$\vdots \qquad \ldots \}$

← unschön viele Pünktchen! Besser: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a,b);\ a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}\}$.

e) **Verallgemeinerung**: Sei $n \geq 1$ und seien $A_1, \ldots, A_n$ Mengen.

Def. $$\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i := A_1 \times \ldots \times A_n$$

$$:= \{(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n);\ a_j \in A_j\},\ j = 1, \ldots, n.$$

↑ j-te Komponente

↗ n-Tupel, die Reihenfolge der Komponenten ist relevant

(3-Tupel: "Tripel", 2-Tupel: "Paare")

verkürzte Schreibweise bei $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ mal}} =: A^n$.

Übungs-smiley →

1.7. $\boxed{\text{Ü}}$: Seien $A = \{1, 2, 4, 7\}$, $B = \{3, 9, 13, 4, 2\}$, $C = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ gerade}, n < 10\}$, $D = \{n \in \mathbb{N};\ n \text{ gerade} \Rightarrow n > 10\}$, $E = \mathbb{N} \setminus C$.

1. Bilden Sie die Mengen: $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C \cup D$, $D \setminus E$, $A \cap D$, $A \times C$, …

2. Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind:

a) $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, b) $\{6, 8\} \subseteq C$, c) $A \cap D \subseteq \{1, 2, \ldots, 9\}$, d) $\{3, \{3, 9\}\} \subseteq B$,
f) $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x = 4$, g) $1 \in C$, h) $D \neq E$, i) $\emptyset \in B$.

1.8. **Def.**: A, B heißen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$.

1.9. **Notation**: Die Anzahl der Elemente von A schreiben wir als $\#A$.

Bsp.: $\#\{7, 8, 9\} = 3$, $\#\{\text{rot}, 0, \{2,3\}, -i\} = 4$, $\#\emptyset = 0$, $\#\{\emptyset\} = 1$, …

1.10 **Satz**: Für beliebige Mengen A, B, C gelten:

a) $\emptyset \subseteq A$, b) $A \cap B \subseteq A$, c) $A \subseteq A \cup B$, d) $A \subseteq A$, e) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq A$,

f) wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ gelten, dann gilt auch $A \subseteq C$.

1.11. Aussagen: Eine Aussage ist ein Gebilde, von dem man entscheiden kann, ob es wahr oder falsch ist. Eine Aussagenform ist ein Gebilde, das erst durch Einsetzen eines Elements einer Menge in einen "Platzhalter", nämlich einer Variablen, zu einer Aussage wird.

Bsp.: "$17 \in \mathbb{N}$" ist eine Aussage, "$x+3=8$" ist eine Aussagenform mit Variablen x.

1.12. Zusammensetzen von Aussagen: $P, Q, R, \ldots$ seien Aussagen.

(Konjunktion) $P \wedge Q$ ist genau dann wahr, wenn P und Q wahr sind.

(Disjunktion) $P \vee Q$ ist genau dann wahr, wenn P oder Q wahr sind.
(mit "oder" im nicht ausschließenden Sinne)

(Negation) $\neg P$ ist genau dann wahr, wenn P falsch ist.

(Implikation) $P \Rightarrow Q$ bzw. $Q \Leftarrow P$: ist genau dann wahr, wenn P falsch oder P und Q beide wahr sind.

(Bzw. $P \Rightarrow Q$ ist falsch, wenn P wahr und Q falsch ist.)

Bem.: $P \Rightarrow Q$ wird gelesen als "Wenn P, dann Q", "Aus P folgt Q", "P impliziert Q", "Q ist notwendig für P", "P ist hinreichend für Q"...

(Äquivalenz) $P \Leftrightarrow Q$ ist genau dann wahr, wenn P und Q beide wahr oder beide falsch sind.

Bem.: $P \Leftrightarrow Q$ wird gelesen als "P genau dann, wenn Q", "P und Q sind äquivalent", "P dann und nur dann, wenn Q"...

Bsp.: • $n=2 \Rightarrow 5+n=7$ • $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=0$

• $\neg(3.14 \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow 3.14 \notin \mathbb{N}$ • $x=0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} x \cdot y = 0$

1.13. Beispiele für allgemein gültige Aussagen, sogenannte Tautologien, sind:

a) Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: $P \vee (\neg P)$

b) Gesetz der Kontradiktion: $\neg(P \wedge (\neg P))$

c) Gesetz vom Syllogismus: $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

d) Gesetz der doppelten Verneinung: $P \Leftrightarrow (\neg(\neg P))$

e) Gesetz der Kontraposition: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg Q \Rightarrow \neg P))$

1.14. Quantoren:

- **Existenzquantor:** Bsp.: Es gibt ein $x \in$ Tiere mit: x ist weiß und x ist ein Bär.

  Schreiben: $\exists x \in \text{Tiere}: x \text{ weiß} \wedge x \text{ Bär}$.

  Für eine Aussageform $A(x)$, M Menge und $x \in M$, bedeutet

  $\exists x \in M: A(x)$: Es existiert (mindestens) ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt/wahr ist.

  Bsp.: $\exists x \in \mathbb{N}: x + 2 = 5$

- **Allquantor:** Bsp.: Alle Tiere sind weiß.

  Schreiben: $\forall x \in \text{Tiere}: x \text{ weiß}$

  $\forall x \in M: A(x)$: Für alle $x \in M$ gilt $A(x)$.

  Bsp.: $\forall x \in \mathbb{N}: x + 2 \neq 1$.

Variante des Existenzquantors:

$\exists!\, x \in M: A(x)$: Es existiert (genau) ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt/wahr ist (d.h. nur eins und kein anderes).

1.15 Grundregeln für Quantoren:

a) $\forall x \in M: A(x) \iff \neg(\exists x \in M: \neg A(x))$

b) $\exists x \in M: A(x) \iff \neg(\forall x \in M: \neg A(x))$

c) $\forall x \in M \ \forall y \in N: A(x,y) \iff \forall y \in N \ \forall x \in M: A(x,y)$

d) $\exists x \in M \ \exists y \in N: A(x,y) \iff \exists y \in N \ \exists x \in M: A(x,y)$

e) $\exists x \in M \ \forall y \in N: A(x,y) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \forall y \in N \ \exists x \in M: A(x,y)$

⇝ Negation von Aussagen mit mehreren Quantoren z.B.:

$$\neg(\forall x \in M \ \exists y \in N: A(x,y)) \iff \exists x \in M \ \neg(\exists y \in N: A(x,y))$$
$$\iff \exists x \in M \ \forall y \in N: \neg A(x,y)$$

Bsp.: $T = \{\text{Töpfe}\}$, $D = \{\text{Deckel}\}$, $P(x,y) :\iff$ Auf Topf x passt der Deckel y.

Dann: $\forall x \in T \ \exists y \in D: P(x,y)$ "Auf jeden Topf passt ein Deckel."

Verneinung: $\neg(\forall x \in T \ \exists y \in D: P(x,y)) \iff \exists x \in T \ \forall y \in D: \neg P(x,y)$.

heißt "Es gibt einen Topf, auf den passt kein Deckel".

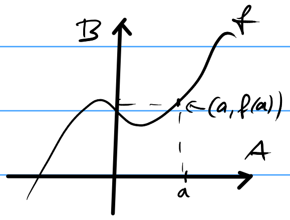
1.16. **Abbildungen:** Seien A, B Mengen.

Def: $f : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$ oder $A \xrightarrow{f} B$

Zuordnungsvorschrift, die jedem El. von A genau ein El. von B zuordnet,
d.h. $\forall a \in A \; \exists! \; b \in B : b = f(a)$.

Ganz genau formuliert:

- Eine Abbildung f ist ein Tripel (A, B, R) mit einer Menge A (genannt Definitions$\overset{\text{auch bereich}}{\text{menge}}$)
und einer Menge B (genannt Wertemenge/Wertebereich)
und einer Menge $R \subseteq A \times B$ mit $\forall a \in A \; \exists! \, b \in B : (a, b) \in R$.
[Anstelle $(a,b) \in R$ schreiben wir dann $f(a) = b$.]
Die Menge $\Gamma(f) := R = \{(a, f(a)) \in A \times B\}$
heißt der Graph bzw. das Schaubild von f.



Bsp.: $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$(m, n) \mapsto m + n$ ist Abbildung

$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto \pm n$ ist keine Abb.

1.17. Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

- Def.: Ist $A' \subseteq A$, so heißt $f(A') := \{f(a) \in B ; a \in A'\}$ das Bild von A' (unter f).
Ist $B' \subseteq B$, so heißt $f^{-1}(B') := \{a \in A ; f(a) \in B'\}$ das Urbild von B' (unter f)
→ keine Umkehrabbildung!
- Def.: $f = g : C \to D \; :\Leftrightarrow A = C, \; B = D$, gleiche Zuordnungsvorschrift
- $f_{|A'} : \begin{array}{ccc} A' & \to & B \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$ für $A' \subseteq A$ ist die Einschränkung von f auf A'
- Ist $f : A \to B$ geg., heißt $g : \tilde{A} \to B$ eine Fortsetzung von f auf $\hat{A}$,
falls $A \subseteq \tilde{A}$ und $f = g_{|A}$.
- Eine Abb. $A \to B$ heißt insbesondere dann Funktion, wenn B eine Menge reeller oder komplexer Zahlen ist.

1.18. **Eigenschaften von Abbildungen:** Sei $f : A \to B$ eine Abb.

- f heißt injektiv (eineindeutig), falls $\forall a, \hat{a} \in A : f(a) = f(\hat{a}) \Rightarrow a = \tilde{a}$
- f heißt surjektiv (auf), falls $f(A) = B$, d.h. $\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$.
- f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

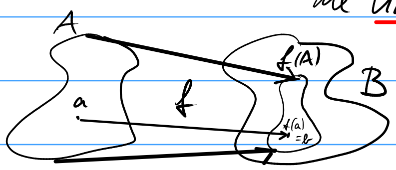
1.19. **Bsp.:** • $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$ ist injektiv, nicht surjektiv

• $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } n=0, \\ n-1, & \text{falls } n \geq 1, \end{cases}$ ist surjektiv, nicht injektiv

• $\mathrm{id}_A: A \to A,\ a \mapsto a$, ist bijektiv ("Identitätsabbildung von A")

1.20. **Umkehrabbildungen:**

Sei $f: A \to B$ injektiv, dann heißt $f^{-1}: f(A) \to A,\ b \mapsto (a \text{ mit } f(a) = b)$ die Umkehrabbildung von f. "vertauschen a und b"



Bem.: $f^{-1}: f(A) \to A$ ist bijektiv, $(f^{-1})^{-1} = f$.
Vgl. [Hoff, S.17].

⚠ f^{-1} hat zwei Bedeutungen: 1.) $f^{-1}(B')$
2.) $f^{-1}(b)$, falls f injektiv

1.21. Notation: $\mathcal{F}(A,B) := \{ f: A \to B \text{ Abb.} \}$

Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion:

1.22. **Def.:** $\mathbb{N} := \{1,\ \underbrace{1+1}_{=:2},\ \underbrace{2+1}_{=:3},\ \underbrace{3+1}_{=:4}, \dots\}$, $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$

Für $\ell \in \mathbb{R}$ schreibe $\mathbb{N}_{\geq \ell}, \mathbb{Z}_{\geq \ell}, \mathbb{R}_{\geq \ell}, \dots$ mit naheliegender Bedeutung

1.23. Vollständige Induktion (VI): Beh. $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$, z.B. $\forall n \in \mathbb{N}: 1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Die vollst. Ind. ist ein Beweisverfahren, das eine Beh. dieser Form schrittweise zeigt:

1. Schritt: Induktionsanfang: Zeige: $A(1)$ gilt.

2. Schritt: Induktionsschritt: Zeige: $\forall k \in \mathbb{N}: (\underbrace{A(k)}_{\text{Ind.vor., wird im Beweis benutzt}} \Rightarrow A(k+1))$.

3. Schritt: Induktionsschluss: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$.

Bsp.: Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{1+2+\dots+n = \frac{1}{2} n(n+1)}_{\text{hier Aussage "}A(n)\text{"}}$. [z.B. $1+2+3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$,
$1+2+\dots+100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 5050$]

Bew.: 1. $A(1)$ gilt: Denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$ ✓

2. Ind. vor. $A(k)$ gilt $\Rightarrow 1+2+\dots+k = \frac{1}{2} k(k+1)$. Dann gilt $A(k+1)$,

denn $(1+2+\dots+k)+(k+1) = \frac{1}{2} k(k+1) + (k+1)$

$= (k+1) \cdot (\frac{1}{2} k + 1) = (k+1) \cdot \frac{1}{2} (k+2) = \frac{1}{2} (\underline{k+1})(\underline{k+1+1})$. ✓ □

Anschaulich: $\underset{\text{Ind. Anfang}}{A(1)} \underset{\substack{\text{Schritt}\\ k=1}}{\Rightarrow} A(2) \underset{\substack{\text{Schritt}\\ k=2}}{\Rightarrow} A(3) \underset{\substack{\text{Schritt}\\ k=3}}{\Rightarrow} A(4) \underset{\substack{\text{Schritt}\\ k=4}}{\Rightarrow} A(5) \Rightarrow \dots$

1.24. **Modifikation der VI** (vollständigen Induktion):

Sei $\ell \in \mathbb{Z}$. 1. (IA) $A(\ell)$ gilt.

2. (IS) $\forall k \geq \ell: A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

3. Ind.schluss: $\forall n \geq \ell: A(n)$ gilt.

⇝ Beweis dieser Modifikation: Wende (VI) in 1.23 an auf die Aussage $B(n) := A(\ell+n-1)$.

1.25. Bsp.: $A(n) :\Leftrightarrow$ Die Anzahl Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen drei auszuwählen, beträgt $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$.

Bew. (ausführlich aufgeschrieben):

1. (IA) $A(3)$ gilt, denn es gibt $1 = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeit der "Auswahl".

2. (IS) Es gelte die Ind.Vor.: $\forall k \geq 3: A(k)$.

Nun sollen drei aus $k+1$ El. ausgewählt werden, man hat

- Laut Ind.vor. $\frac{1}{6}k(k-1)(k-2)$ viele Auswahlmöglichkeiten, drei El. aus Nr. $1, \dots, k$ zu wählen,
- und bei Wahl von El. Nr. $k+1$ noch $\frac{1}{2}k(k-1) = 1+2+\dots+(k-1)$ viele Möglichkeiten, zwei El. aus Nr. $1, \dots, k$ auszuwählen. (Vgl. Bsp. in 1.23)

Dies macht zusammen $\frac{1}{6}k(k-1)(k-2) + \frac{1}{2}k(k-1) = k \cdot (k-1) \cdot \left(\frac{1}{6}(k-2) + \frac{1}{2}\right)$

$$= k \cdot (k-1) \cdot \frac{1}{6}(k-2+3) = \frac{1}{6} \cdot \underbrace{(k+1)}(\underbrace{k+1}-1)(\underbrace{k+1}-2)$$

viele Möglichkeiten. Es folgt also $A(k+1)$.

3. Laut Induktionsprinzip (VI), Modifikation 1.24, folgt die Behauptung $\forall n \geq 3: A(n)$. □

1.26. Bsp. für einen Induktionsbeweis mit Fehler / Scheinbeweis:

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Leftrightarrow$ je n reelle Zahlen sind gleich.

"Bew." durch VI: (IA) $n=1$: $A(1)$ gilt ✓

(IS) zeigen $A(k) \Rightarrow A(k+1)$: $\{\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_k}_{\text{gleich nach Vor.}}, a_{k+1}\}$

$\underbrace{a_2, \dots, a_k, a_{k+1}}_{\text{gleich nach Vor.}} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$. ✓

"□"

Fehler im Beweis: Im (IS) wird stillschweigend $k \geq 2$ angenommen.

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An2: Die reellen Zahlen

Stichworte: Körperaxiome, Anordnung/positive Zahlen, Rechenregeln für Ungleichungen, Beträge, rekursive Definitionen, Σ/Π-Zeichen, $n!$, a^n, Bernoulli-Ungleichung, Binomialkoeffizienten, binomischer Satz

---

2.1. Motivation: Wir führen die reellen Zahlen axiomatisch ein. Die grundlegendsten Rechenregeln werden aus den Axiomen hergeleitet, speziell für Ungleichungen, die für die Analysis eine besondere Rolle spielen. Abkürzungen für besondere reelle Zahlen werden eingeführt, wie z.B. Summen/Produkte/Potenzen, Fakultäten und die Binomialkoeffizienten, für die der binomische Satz gilt. Vgl.: [Hoff], S.33-38, §1.4.1-1.4.3.

2.2. Die Axiome der reellen Zahlen: Die Menge $\mathbb{R}$ ($\neq \emptyset$, ergibt sich aus den Axiomen) der reellen Zahlen wird definiert als diejenige Menge, die folgenden Eigenschaften/Axiomen genügt: Es gibt eine Teilmenge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ (der positiven reellen Zahlen), eine Abb. $+: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto a+b$ (genannt Addition) und eine Abb. $\cdot: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a,b)\mapsto a\cdot b =: ab$ (genannt Multiplikation), für die gilt:

(A1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ Assoziativität $(\forall a,b,c \in \mathbb{R})$
(A2) $a+b = b+a$ Kommutativität $(\forall a,b \in \mathbb{R})$
(A3) $\exists 0 \in \mathbb{R}: a+0 = a$ Nullelement $(\forall a \in \mathbb{R})$
(A4) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists -a \in \mathbb{R}: a+(-a)=0$ (additives) Inverses zu a
(M1) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ Assoziativität $(\forall a,b,c \in \mathbb{R})$
(M2) $a\cdot b = b\cdot a$ Kommutativität $(\forall a,b \in \mathbb{R})$
(M3) $\exists 1 \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}: a\cdot 1 = a$ Einselement $(\forall a \in \mathbb{R})$
(M4) $\forall a \in \mathbb{R}^*\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}: a a^{-1} = 1$ (multiplikatives) Inverses zu a

Es gibt ein Axiom, das die "Verträglichkeit" von + und $\cdot$ besagt:

(D) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ Distributivität $(\forall a,b,c \in \mathbb{R})$

Die Axiome (P1)-(P3) legen die Grundlage für das Rechnen mit positiven reellen Zahlen und die Anordnung "<" ("kleiner", vgl. 2.9):

(P1) $a = 0 \;\dot\vee\; a \in \mathbb{P} \;\dot\vee\; -a \in \mathbb{P}$, ⌜$\dot\vee$ steht für entweder-oder⌟
(P2) $a, b \in \mathbb{P} \Rightarrow a+b \in \mathbb{P}$,
(P3) $a, b \in \mathbb{P} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{P}$.

Das letzte Axiom (V) zeigt den Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ auf, vgl. 3.3 und 6.9.

(V) Vollständigkeit:
Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.

2.3. Die Menge $\mathbb{R}$, zusammen mit + und den Axiomen (A1)-(A4) bildet eine abelsche (kommutative) Gruppe $(\mathbb{R}; +, (A1)\text{-}(A4))$, dabei gilt:

(1) Eindeutigkeit von 0: $(\exists! 0)$ $0'$ Nullelement $\Rightarrow 0 = 0'$ **Bew.:** $0+0' = 0$
$\underset{(A2)}{=} 0'+0 = 0'$ ✓

(2) Eindeutigkeit von $-a$: **Bew.:** Sei b Inverses von a.
Haben $a+(-a)=0 \Rightarrow b+(a+(-a)) = b+0 = b$
$\overset{(A1)}{\Rightarrow} (a+b)+(-a) = b \Rightarrow 0+(-a) = b \Rightarrow -a = b$. ✓

(3) **Beh.:** $\forall a, b \in \mathbb{R}\; \exists!\, x \in \mathbb{R}: \; a+x = b$ (schreibe $b-a$ für dieses x).
Bew.: Ex.: $x = b+(-a)$ tut's: $a+b+(-a) \overset{(A2)}{=} a+(-a)+b = 0+b = b$.
Eind.: $-a+\underbrace{a+x}_{=b} = -a+b \Rightarrow 0+x = b+(-a) \Rightarrow x = b+(-a)$. □

Somit gilt: $b-a = -a+b = b+(-a)$, speziell: $0-a = -a$, $-(-a) = a$, $-(a+b) = -a-b$

2.4. **Def.:** Eine Menge K mit den Axiomen $(K; +, \bullet; (A1)\text{-}(A4), (M1)\text{-}(M4), D)$ wie hier heißt ein (kommutativer) Körper.

2.5. Ebenso wie in (1)-(3) gilt auch für die Multiplikation: (1') 1 ist eindeutig
(2') a^{-1} ist eindeutig
(3') $\forall a \in \mathbb{R}^* \; \forall b \in \mathbb{R}\; \exists!\, x \in \mathbb{R}: ax = b$,
nämlich $x = b \cdot a^{-1}$.

Notation: $\frac{b}{a} := x = b \cdot a^{-1}$, speziell: $\frac{1}{a} = a^{-1}$.

2.6. **Bem.:** $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, Bew.: $\underline{a \cdot 0} = a \cdot (0+0) = \underline{a \cdot 0} + a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$. □

2.7. Eine Grundregeln zum Rechnen mit + und · :

(1) $a \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^*$, Bew.: Sonst $a^{-1} = 0 \Rightarrow 1 = a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0$, ↯ zu (M3). □

(2) Satz vom Nullprodukt: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Bew.: „⇐": 2.6, „⇒": Falls $a = 0$ ✓, falls $a \neq 0$: $\underbrace{\exists a^{-1} : \underbrace{a^{-1} a b}_{=b}}_{\text{nach (M4)}} = 0 \Rightarrow b = 0$. □

(3) $(ab)^{-1} \overset{!}{=} b^{-1} a^{-1} \overset{(M2)}{=} a^{-1} b^{-1}$

Bew.: $(ab)(ab)^{-1} = 1 \Rightarrow \underbrace{(b^{-1}a^{-1}) \cdot (ab)}_{=1} (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \Rightarrow \underbrace{b^{-1} b}_{=1} (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

$\Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1} \overset{(M2)}{=} a^{-1} b^{-1}$. □

(4) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

Bew.: $ab + (-a)b \overset{(D)}{=} (a-a)b = 0 \cdot b \overset{2.6}{=} 0 \Rightarrow (-a)b = -(ab)$,

$ab + a(-b) \overset{(D)}{=} a(b-b) = a \cdot 0 \overset{2.6}{=} 0 \Rightarrow a(-b) = -(ab)$. □

(5) $c(b-a) = cb - ca$, Bew.: $c(b-a) \overset{2.3(3)}{=} c(b + (-a)) \overset{(D)}{=} cb + c(-a) \overset{2.3(3)}{=} cb - ca$. □

2.8. Bem.: • $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist keine abelsche Gruppe weil $\nexists\, 0^{-1}$, aber: $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ist abelsche Gruppe.
• $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ erfüllt (A1)-(A3), (M1)-(M3), D, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{P}$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ erfüllt zudem (P1)-(P3).

2.9. Def.: In (P1) nennen wir ein $a \in \mathbb{P}$ positiv und ein a mit $-a \in \mathbb{P}$ negativ.

Wir definieren $a < b$ (a kleiner als b)

bzw. $b > a$ (b größer als a) als die Aussage $b - a \in \mathbb{P}$.

Die Aussage $a \leq b$ (a kleiner oder gleich b) bzw. $b \geq a$ (b größer oder gleich a) wird definiert als $a < b \vee a = b$. Die Zeichen $<, \leq, >, \geq$ heißen Ungleichungszeichen.

2.10. Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln für Ungleichungen:

(1) $a = b \;\dot{\vee}\; a < b \;\dot{\vee}\; a > b$, Bew.: $a - b = 0$, $a - b \in \mathbb{P}$, $-(a-b) \in \mathbb{P}$ laut (P1). □

(2) $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$, Bew.: $b - a > 0$, $c - b > 0 \underset{(P2)}{\Rightarrow} c - b + b - a > 0 \Rightarrow c - a > 0$. □

(3) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, Bew.: $b - a > 0 \Rightarrow (b + c) - (a + c) > 0$. □

(4) $a < b$, $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$, Bew.: $c(b - a) \overset{(P3)}{>} 0 \Rightarrow cb - ca > 0$. □

(5) $a < b \Leftrightarrow -a > -b$, Bew.: „⇒" genügt wegen Symmetrie: $b - a > 0 \Rightarrow -a - (-b) > 0$. □

(6) $a < b$, $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$, Bew.: $c < 0 \Rightarrow -c > 0 \Rightarrow -ca < -cb \overset{(5)}{\Rightarrow} ca > cb \Rightarrow ac > bc$. □

(7) $a < 0$, $b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$, Bew.: $a < 0 \Rightarrow a \cdot b \overset{(6)}{>} 0 \cdot b = 0$. □

(8) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ (insb. $1 > 0$), Bew.: • $a > 0 \Rightarrow a \cdot a \overset{(4)}{>} a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$,

• $a < 0 \Rightarrow a \cdot a \overset{(6)}{>} a \cdot 0 \Rightarrow a^2 > 0$. □

(9) $a>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>0$ $(a\neq 0)$, **Bew.:** „$\Rightarrow$" genügt wegen $\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$: $a\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a}\neq 0$ ✓
Also $\frac{1}{a}>0$ (✓) oder $\frac{1}{a}<0 \Rightarrow \frac{1}{a}\cdot a \overset{(4)}{<} 0\cdot a \Rightarrow 1<0$, $\lightning$ zu (8). □

(9') $0<a<b \Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$, **Bew.:** $ab>0 \overset{(9)}{\Rightarrow} \frac{1}{ab}>0 \overset{(4)}{\Rightarrow} 0<a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab} \Rightarrow 0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$. □

(10) $0<b$, $a^2<b^2 \Rightarrow a<b$, **Bew.:** Falls $a\le 0$ ✓, also OE $a>0$: Sonst $b\le a \overset{(9')}{\Rightarrow} 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$
$\Rightarrow \underbrace{a<\frac{b^2}{a}}_{\text{da } a^2<b^2} \le \frac{b^2}{b}=b \Rightarrow a<b$, $\lightning$. □

(11) $a<b \Rightarrow \exists c\in\mathbb{R}: a<c<b$,
Bew.: $2:=1+1>0 \overset{(9)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}>0 \Rightarrow 2a=a+a \overset{(3)}{<} a+b \overset{(3)}{<} b+b=2b$
$\overset{(4)}{\Rightarrow} a<\frac{a+b}{2}<b \Rightarrow c:=\frac{a+b}{2}$ erfüllt $a<c<b$. □

(12) $-a=a \Leftrightarrow a=0$, **Bew.:** • $a=0 \Rightarrow -a=0=a$ ✓, • $a=-a \overset{(D1)}{\Rightarrow} a=0$. □

(13) $\forall c>0: a\le b+c \Rightarrow a\le b$, **Bew.:** Sonst $b<a \overset{(11)}{\Rightarrow} \exists t\in\mathbb{R}: b<t<a$. Sei $c:=t-b>0$.
$\Rightarrow t=b+c\ge a$, $\lightning$. □

Def. der Potenz b^n s. 2.15 (4)

(14) Bernoulli-Ungleichung: $\forall a\in\mathbb{R}_{>-1}\ \forall n\in\mathbb{N}_0: (1+a)^n\ge 1+na$. (Für $n\ge 2$, $a\neq 0$, sogar $>$ statt $\ge$.)
Bew. (durch vollst. Ind.): $n=0$: $(1+a)^0=1\ge 1=1+0\cdot a$ ✓, $n\rightsquigarrow n+1$: $(1+a)^{n+1}=(1+a)^n\cdot\underbrace{(1+a)}_{>0}\underset{\text{I.Vor.}}{\ge}(1+na)\cdot(1+a)$
$=1+a+na+\underbrace{na^2}_{\ge 0}\ge 1+(n+1)\cdot a$. □

2.11. **Def.:** Für $a\in\mathbb{R}$ heißt $|a|:=\begin{cases}a, & a\ge 0\\ -a, & a<0\end{cases}$ der Betrag von a (auch: Absolutbetrag von a),
Für $x,y\in\mathbb{R}$ heißt $\max(x,y):=\begin{cases}x, & x\ge y\\ y, & \text{sonst}\end{cases}$ das Maximum von x und y,
und $\min(x,y):=\begin{cases}x, & x\le y\\ y, & \text{sonst}\end{cases}$ das Minimum von x und y.

2.12. **Bem.:** $|a|=|-a|=\max(a,-a)$.

2.13. Eigenschaften des Betrags $|\cdot|$:

(1) $|a|=0 \Leftrightarrow a=0$, **Bew.:** „$\Leftarrow$" ✓, „$\Rightarrow$": $|a|=\max(a,-a)=0 \Rightarrow a=0$. □

(2) $|a+b|\le|a|+|b|$, **Bew.:** $a+b\le|a|+|b| \wedge -(a+b)\le|a|+|b| \Rightarrow |a+b|\le|a|+|b|$. □

(3) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$, **Bew.:** OE $a\ge 0$, sonst $-a$ statt a: Symmetrie $\Rightarrow$ OE $b\ge 0$. Dann $|a\cdot b|=a\cdot b=|a|\cdot|b|$. □

(4) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $b\neq 0$, **Bew.:** $|a|=\left|\frac{ab}{b}\right|\overset{(3)}{=}\left|\frac{a}{b}\right|\cdot|b| \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$. □

(5) $\big||a|-|b|\big| \underset{!}{\le} |a-b| \underset{(2)}{\le} |a|+|b|$, **Bew.:** $|a|=|(a-b)+b| \overset{(2)}{\le} |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b|\le|a-b|$,
$\rightsquigarrow$ Symmetrie: $|b|-|a|=-(|a|-|b|)\le|a-b| \Rightarrow \big||a|-|b|\big|\le|a-b|$. □

(6) $|a-c|\le|a-b|+|b-c|$, **Bew.:** $a-c=(a-b)+(b-a) \overset{(2)}{\Rightarrow} |a-c|\le|a-b|+|b-a|$. □

Bem.: Regel (2) heißt Dreiecksungleichung und wird häufig verwendet.
Regel (5) wird manchmal Dreiecksungleichung „nach unten" genannt und liefert eine „untere Abschätzung" für $|a-b|$, sowohl durch $|a|-|b|$ als auch durch $|b|-|a|$.

2.15. **Die rekursive Definition:** Geg. sei eine Zahlenfolge (reelle Folge, das ist eine Abb. $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, wo $\underset{i \in \mathbb{N}_0}{i} \mapsto \underset{x_i \in \mathbb{R}}{x_i}$ geschrieben wird, haben also die Bilder $x_0, x_1, x_2, \dots$

Wollen damit neue Zahlenfolgen definieren, z.B. $x_0 \xrightarrow{+x_1} x_0+x_1 \xrightarrow{+x_2} (x_0+x_1)+x_2 \xrightarrow{+x_3} (x_0+x_1+x_2)+x_3, \dots$
In rekursiven Definitionen wird die Def. eines z_{n+1} von vorherigen Folgengliedern $z_0, z_1, \dots, z_n$ (und der Folge x) abhängig gemacht. Das ergibt z.B. das Summen- und Produktzeichen wie folgt.

(1) Das Summenzeichen: Für $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_{\geq k}$ definiere $\underbrace{\sum_{i=k}^{n+1} x_i}_{z_{n+1}} := \underbrace{\sum_{i=k}^{n} x_i}_{z_n} + x_{n+1}$.

Man nennt $z_k := x_k$ den Startwert der neuen Folge $z_0, z_1, z_2, \dots$

Somit: $z_n = x_k + x_{k+1} + \dots + x_n$, machen damit für diese Pünktchen klar, was gemeint ist

Spezialfälle: 1.) $n=k$, dann ist $\sum_{i=k}^{k} x_i := x_k$, 2.) $k>n$, dann ist $\sum_{i=k}^{n} x_i := 0$.

Die x_i heißen Summanden der Summe.

Bsp.: $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ "kleiner Gauß" (Beweis: s. 1.23), $\sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$

(2) Das Produktzeichen: Ebenso wird $\prod_{i=k}^{n} x_i$ definiert: Sei $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq k}$.

Definiere $\prod_{i=k}^{n+1} x_i := \left(\prod_{i=k}^{n} x_i\right) \cdot x_{n+1}$.

Somit: $\prod_{i=k}^{n} x_i = x_k \cdot x_{k+1} \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot x_n$

Die x_i heißen Faktoren des Produkts.

Spezialfälle: 1.) $n=k$, dann ist $\prod_{i=k}^{k} x_i := x_k$, 2.) $k>n$, dann ist $\prod_{i=k}^{n} x_i := 1$.

(3) Das Fakultätszeichen: Definiere $n! := \prod_{j=1}^{n} j$, Startwert: $0! := 1$.

Rekursiv also $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$, $0! = 1$. Sprich: "n Fakultät" für $n!$

Somit: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

(4) Definition der Potenz: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ def.

$a^n := \prod_{j=1}^{n} x_j$ mit $x_j = a$ für alle $j \leq n$, und $a^0 := 1$, somit: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$,
d.h. n Faktoren, alle $=a$

Für $a \neq 0$ sei $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

(5) Der Binomialkoeffizient: Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ erkläre rekursiv

$$\binom{\alpha+1}{n+1} = \binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} \text{ mit Startwerten } \binom{\alpha}{0} := 1, \ \binom{\alpha}{1} := \alpha.$$

Einfacher ist die nicht-rekursive Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{n}$ wie folgt.

Binomialkoeffizienten und der binomische Satz

2.16. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Definiere $\binom{\alpha}{n} := \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1)$ als Binomialkoeffizient.

2.17. **Eigenschaften:**

$\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = \alpha$, für $\alpha = m \in \mathbb{N}_0$, $m < n$, ist $\binom{m}{n} = 0$.

Für $m \geq n$ ist $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$,

denn $\binom{m}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (m - k + 1) = \frac{(m-n+1) \cdots m \cdot (m-n)!}{n! \cdot (m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

Es ist außerdem $\binom{m}{m} = 1$. Weiter $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, da $m - (m-n) = n$.

2.18. **Bem.:** Die Formel in 2.15(5) kann durch Einsetzen der Def. 2.16 und Erweitern hergeleitet werden. Schwieriger, aber auch möglich, ist die Herleitung der Def. 2.16 aus Formel 2.15(5). Man nennt diese die (Rekursions-)formel vom Pascalschen Dreieck.

$$\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \leftarrow \binom{0}{0} = 1 \\
1 & 1 & & & & & \leftarrow \binom{1}{n} \\
1 & 2 & 1 & & & & \leftarrow \binom{2}{n} \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \leftarrow \binom{3}{n} \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \leftarrow \binom{4}{n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}$$

2.19. Binomischer Satz: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$.

Dann gilt $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$.

l.S. = linke Seite
r.S. = rechte Seite

Bew. (ausführlich): durch vollst. Ind. nach n, $n = 0$: l.S. $= (a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^{0-0} b^0 =$ r.S. ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: Es gelte die Formel für ein $n \geq 0$, dann gilt sie auch für $n+1$ wegen

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^{n+1-j} b^j = a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\binom{n+1}{j}}_{=\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}} a^{n+1-j} b^j + b^{n+1}$$

nach 2.15(5), Indexsubst. in zweiter Σ: $k := j-1$

$$= a^{n+1} + a \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j + b \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= a \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \underset{\text{Ind. Vor.}}{=} (a+b) \cdot (a+b)^n$$

$$= (a+b)^{n+1}. \quad \square$$

2.20. **Bsp. für binom. Satz:**

- $n = 2$: $(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $n = 4$: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 + b^4$
- $a = b = 1$: $2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} \cdot 1^j = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.
- $a = 1, b = -1$: $0 = (1-1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^{n-j} \cdot (-1)^j = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An3: Rationale und irrationale Zahlen

Stichworte: rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, Vollständigkeit/Archimedes-Eigenschaft, Wohlordnungssatz, Satz von der n-ten Wurzel, geometrische Summe, Dezimalbruchdarstellung [Hoff] §1.6−1.8

3.1. **Einleitung:** Wir definieren die reellen Zahlen und die Begriffe im Vollständigkeitsaxiom (V). Die Archimedes-Eigenschaft folgt aus (V), und liefert etwa den Wohlordnungssatz. Demnach liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, und wir können die n-te Wurzel einer Zahl definieren. Weiter kann man reelle Zahlen als Dezimalbruch darstellen; zum Beweis wird die Formel von der geometrischen Summe benötigt.

3.2. **Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$:** Sei $\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R};\ \exists p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}_{(\neq 0)} : x = \frac{p}{q}\}$.

Für $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt: $a \dotplus b \in \mathbb{Q}$, $-a \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Q}^{\times} \Rightarrow \hat{a} \in \mathbb{Q}$.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{P} \cap \mathbb{Q})$ erfüllt (A1)−(A4), (M1)−(M4), (D), (P1)−(P3), und bildet demnach einen angeordneten (kommutativen) Körper.

3.3. Aber: (V) gilt nicht! Denn: $\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$.

Bew.: Sonst sei $x > 0$, $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q > 0$ teilerfremd so, dass $x^2 = 2$.

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p, \text{ d.h. } \exists m \in \mathbb{N} : p = 2m.$$

$$\Rightarrow 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow 2 \mid q^2 \Rightarrow 2 \mid q, \quad \lightning \text{ gegen Teilerfremdheit von } p, q. \quad \square$$

Inwiefern widerspricht dies (V)? Hatten das

Vollständigkeitsaxiom (V): Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt eine $\underbrace{\text{kleinste obere Schranke}}$ (in $\mathbb{R}$).

↖Supremum, vgl. Def. 3.5

Definieren die Begriffe aus (V) wie folgt.

3.4. **Def.:** Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R} \ni a$.

- a heißt obere Schranke (o.S.) von M, falls $\forall m \in M : m \leq a$. (Notiere $M \leq a$, $a \geq M$.)
- M heißt nach oben (n.o.) beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ o.S. von M

Analog: untere Schranke (u.S.), nach unten (n.u.) beschränkt.

- M heißt beschränkt $\Leftrightarrow$ M ist n.o. und n.u. beschränkt

An 3
-2-

3.5. Def.: Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R} \ni s$.

- s heißt Kleinste o.S. von M, falls $s \geq M$ und $\forall t \in \mathbb{R}$, t ist o.S. von M: $s \leq t$.
  (D.h. jede o.S. von M ist mindestens so groß wie s.)
- Ist s Kleinste o.S., so heißt s Supremum von M, schreibe $s = \sup(M)$.
  Falls $s = \sup(M)$ und $s \in M$, heißt s auch Maximum von M, schreibe $s = \max(M)$.

Bem.: • Ein Supremum ist also das Minimum aller oberer Schranken.
• M endlich $\Rightarrow \max(M) = \sup(M)$. • Bsp.: $\sup\{x \in \mathbb{R};\ x < 1\} = 1$.

Analog: größte u.S. = Infimum von M, schreibe $\inf(M)$, $\inf(M) \in M \Rightarrow \inf(M) = \min(M)$: Minimum

3.6. Bem.: In 3.3 hat die n.o. beschränkte Menge $M = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 \leq 2\} \neq \emptyset$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$:
Beispielsweise kann die absteigende Folge $1.5 > 1.42 > 1.415 > 1.4143 > 1.41422 > \ldots$
rationaler oberer Schranken von M beliebig weit fortgesetzt werden, sie hat kein Minimum in $\mathbb{Q}$;
wohl aber in $\mathbb{R}$, wir nennen diese Zahl $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, vgl. 3.14.
Studieren nun Folgerungen des Vollständigkeitsaxioms in $\mathbb{R}$.

3.7. Archimedes-Eigenschaft (A): $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt,
d.h. $\neg(\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: n \leq a) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: n > a$.

Bew.: Sonst folgt mit (V): $\exists s = \sup(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$, denn $\mathbb{N} \neq \emptyset$.
$\Rightarrow s-1$ ist keine o.S. $\Rightarrow \exists n^* \in \mathbb{N}: s-1 < n^* \Rightarrow s < n^*+1 \in \mathbb{N}$, ↯. □

3.8. Folgerung (1): $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b > 0: \exists n \in \mathbb{N}: nb > a$.
Bew.: $(A) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: n > \frac{a}{b} \Rightarrow nb > a$. □

3.9. Folgerung (2): $\forall b > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: 0 < \frac{1}{n} < b$.
Bew.: Folgerung (1) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: nb > 1 \Rightarrow b > \frac{1}{n}$. □

3.10. Folgerung (3): $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists! n \in \mathbb{Z}: n \leq x < n+1$. Schreiben $[x] := n$
und nennen n die Gaußklammer von x. Bsp.: $[-3.14] = -4$, $[2.1] = 2$.

Bew.: • Eindeutigkeit von n: Sei $m \leq x < m+1$, o.E. $n < m \Rightarrow n+1 \leq m \leq x < n+1 \Rightarrow n < n$ ↯.
• Existenz von n: a) $x \geq 0$: $(A) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: m > x \Rightarrow \emptyset \neq \{k \in \mathbb{N};\ x < k\} = M$.
Sei p kleinstes El. von M laut Wohlordnungssatz 3.11.
$\Rightarrow n := p-1 \leq x < p = n+1$.

b) $x < 0$: $(A) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: x+k \geq 0$, finde n wie in a) für $x+k$
$\Rightarrow n \leq x+k < n+1 \Rightarrow \underbrace{n-k} \leq x \leq \underbrace{n-k}+1 \Rightarrow n-k$ tut's. □

3.11. **Wohlordnungssatz:** Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}_0$ besitzt ein minimales Element (in M).

Bew.: $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$, sei $U := \{n \in \mathbb{N}_0 ; n \leq M\} \ni 0$.

Beh.: $\exists n_0 \in U : n_0 + 1 \notin U$, denn sonst folgte induktiv $U = \mathbb{N}_0$, mit (A) also $M = \emptyset$, ↯.

Also folgt $n_0 \leq M$, $n_0 + 1 \nleq M$, d.h. $n_0 \in M$ $\Rightarrow$ n_0 ist minimal in M. □

3.12. **Folgerung (I):** $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$ (d.h. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$).

Bew.: Folgerung (2) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} \leq b - a$. Sei $m := \min\{k \in \mathbb{Z} ; k > na\}$.

$\Rightarrow m - 1 \leq na \Rightarrow a < r := \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$. □

3.13. **Folgerung (II):** Jede reelle Zahl lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen "approximieren", d.h. $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists r \in \mathbb{Q} : |a - r| < \varepsilon$.

Bew.: Folgerung (I) auf $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$ angewandt zeigt:

$\exists r \in \mathbb{Q} : a - \varepsilon < r < a + \varepsilon \Leftrightarrow a - r < \varepsilon \wedge \underbrace{r - a}_{= -(a-r)} < \varepsilon \Leftrightarrow |a - r| < \varepsilon$. □

3.14. **Satz von der n-ten Wurzel:** $\forall a > 0\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\ \exists!\, b > 0 : b^n = a$.

(Nennen $b > 0$ die n-te Wurzel aus a, Notation: $\sqrt[n]{a} := b$ oder $a^{\frac{1}{n}} := b$.)

"OE" heißt "ohne Einschränkung"

Bew.: OE sei $n \geq 2$. Eindeutigkeit: Seien $0 < b_1 < b_2$ Lösungen $\Rightarrow a = b_1^n \underset{\uparrow}{<} b_2^n = a$, ↯.

Induktiv: $n = 1$ ✓, $b_1^{n+1} = b_1 \cdot b_1^n < b_2 \cdot b_1^n < b_2 \cdot b_2^n = b_2^{n+1}$ ✓

Existenz: Sei $A := \{x \in \mathbb{R} ; x^n < a\} \ni 0$. Dann ist A n.o. beschränkt, denn $\exists k \in \mathbb{N} : a < k \leq k^n$ (d.h. k ist o.S. von A), sei $b := \sup A \geq 0$ nach (V), sogar $b > 0$.

Beh.: $b^n = a$

Sonst 1. Fall: $b^n < a$, dann $\exists \varepsilon : 0 < \varepsilon < \frac{a - b^n}{an} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{b^n}{a}\right) < 1 \Rightarrow n\varepsilon < 1 - \frac{b^n}{a}$

$\Rightarrow \frac{b^n}{a} < 1 - n\varepsilon < (1 - \varepsilon)^n \Rightarrow \left(\frac{b}{1-\varepsilon}\right)^n < a \Rightarrow \underbrace{\frac{b}{1-\varepsilon}}_{> b} \in A$, ↯ gegen $b = \sup A$.

2. Fall: $a < b^n$, dann $\exists \varepsilon : 0 < \varepsilon < \frac{b^n - a}{b^n n} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a}{b^n}\right) < 1 \Rightarrow \frac{a}{b^n} < 1 - n\varepsilon < (1 - \varepsilon)^n$

$\Rightarrow a < (\underbrace{b(1-\varepsilon)}_{< b})^n < b^n$, ↯ gegen $b = \sup A$.

Bem.: Für $r = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ def. $a^r := (a^{1/n})^r = (\sqrt[n]{a})^r$ für $a > 0$. □

Als Vorbereitung für die Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen benötigen wir die

3.15 **Formel von der geometrischen Summe:** $\forall q \in \mathbb{R}_{\neq 1}, \forall m \in \mathbb{N}_0 : \sum_{j=0}^{m} q^j = \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1}$.

Bew.: $(q-1) \sum_{j=0}^{m} q^j = \sum_{j=0}^{m} q^{j+1} - \sum_{j=0}^{m} q^j = q^{m+1} - 1$. □

Bsp.: $\frac{10^4 - 1}{10 - 1} = \frac{9\,999}{9} = 1\,111 = 10^0 + 10^1 + 10^2 + 10^3$, $\quad 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 1023$.

3.16 **Folgerung**: $0<q<1, n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow \underline{\sum_{j=0}^{n} q^j < \frac{1}{1-q}}$ ✓

3.17 **Dezimalbruchdarstellung reeller Zahlen** (Basis $\underline{B=10}$, jedes $B\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ möglich):
Gegeben sei $k\in\mathbb{N}$ und $a_j\in\{0,1,\dots,9\}$ für alle $j\geq -k$. ↖"**B-adische Darstellung**"

- Setze $\underline{S} := \{s_n := \sum_{j=-k}^{n} a_{-j}\, 10^{-j}, n\in\mathbb{N}_{\geq k}\}$.

Dann gilt $\forall n\in\mathbb{N}$: $s_n \leq 9\cdot\sum_{j=-k}^{n} 10^{-j} = 9\cdot 10^k\cdot\sum_{j=0}^{n+k} 10^{-j} \overset{\text{geom.}\Sigma}{=} 9\cdot 10^k\cdot\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+k-1}-1}{\frac{1}{10}-1}$

$$\underset{\text{Folgerung 3.16}}{<} 9\cdot 10^k\cdot\frac{1}{0.9} = 10^{k+1} \Rightarrow S\leq 10^{k+1}.$$

↳ S ist n.o. beschr.

- Sei $\underline{s := \sup S} = \sup(\{s_n\})$,

(Schreibweise: $s = \sum_{j=-k}^{\overset{\text{nur symbolisch}}{\infty}} a_{-j}\, 10^{-j}$ ⇝ die Existenz dieser reellen Zahl ist mit (V) somit gesichert!)

Dann gilt sicher $s_n \leq s_{n+1} \leq s$.

Für $m>n$ ist $s_m \leq s_n + 10^{-n}$, denn $s_m - s_n = \sum_{j=n+1}^{m} a_{-j}\, 10^{-j} \leq 10^{-n}$, folgt mit 9-Abschätzung wie in $\circledast$
$\Rightarrow s\leq s_n + 10^{-n}$,

also wird s durch die s_n approximiert.

Schreibweise: $a_k\ a_{k-1}\ a_{k-2}\ \dots\ a_1\ a_0\ \underset{\uparrow}{.}\ a_{-1}\ a_{-2}\ a_{-3}\ \dots\ a_{-n}\ a_{-n-1}\ \dots$
(**Dezimalbruch**) Dezimalpunkt (lesen "Komma" auf Deutsch)

3.18. Behandle nun das **Problem**: Finde k, a_{-j} zu $0\leq x\in\mathbb{R}$, d.h. finde zu x die Dezimaldarstellung s wie in 3.17 so, dass $x=s$ ist.

3.19. **Hilfssatz**: a) Sei $\underline{q\in\mathbb{R}_{>1}}$. Dann: $\underline{\forall k>0\ \exists n\in\mathbb{N} : q^n > k}$.
b) $\underline{\forall 0<q<1\ \forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N} : q^n<\varepsilon}$.

Bew.: zu a): $q^n = (1+(q-1))^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1+n(q-1)$. Nun $\underline{\exists n : n(q-1) > k-1}$.
$\Rightarrow q^n > k$.

Zu b): $\left(\frac{1}{q}\right)^n \underset{a)}{>} \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow q^n < \varepsilon$. □

3.20. **Konstruktion** zur Lösung von Problem 3.18:

Sei $k := \min\{m \in \mathbb{N};\ x < 10^{m+1}\}$, die a_{-j} werden rekursiv definiert durch $x_m := \sum_{j=-k}^{m} a_{-j} 10^{-j}$ mit $\boxed{x_m \leq x < x_m + 10^{-m}}$:

$m = -k$: $a_k := \max\{b \in \mathbb{N};\ b \cdot 10^k \leq x\}$ $(\Rightarrow 0 \leq b \leq 9$ wegen $k)$

$$\Rightarrow x_{-k} = a_k \cdot 10^k \leq x < (a_k + 1) \cdot 10^k = x_{-k} + 10^k.$$

$m \rightsquigarrow m+1$: $a_{-(m+1)} := \max\{b \in \mathbb{N};\ x_m + b \cdot 10^{-(m+1)} \leq x\}$ $(\Rightarrow 0 \leq b \leq 9$ wegen Kasten oben$)$

$$\Rightarrow x_{m+1} = x_m + a_{-(m+1)} \cdot 10^{-(m+1)} \leq x < x_m + (a_{-(m+1)} + 1) \cdot 10^{-(m+1)} = x_{m+1} + 10^{-(m+1)}.$$

Zeige: $x \overset{!}{=} \sup\{x_m;\ m \in \mathbb{Z}_{\geq -k}\} =: s$, d.h. die Konstruktion tut's.

Bew.: Aus $x_m \leq x < x_m + 10^{-m}$ folgt $s \leq x$.

Mit dem Hilfssatz b) folgt: $\forall c > 0\ \exists m \in \mathbb{N}: 10^{-m} < c$.

Dies bedeutet $x < x_m + 10^{-m} \leq s + 10^{-m} \leq s + c$

$$\Rightarrow x \leq s + c \Rightarrow x \leq s.$$

laut 2.10.(13)

Aus $s \leq x \leq s$ folgt $x = s$. □

3.21. **Bem.:** Laut 3.20 existiert eine Dezimalbruchdarstellung für $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ (wo $x^2 = 2$):

1.) Da $1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2$, beginnt die Dezimaldarst. von $\sqrt{2}$ mit 1.

2.) Da $1.4^2 = 1.96 < 2 < 2.25 = 1.5^2$, " mit 1.4...

3.) Da $1.41^2 = 1.9881 < 2 < 2.0164 = 1.42^2$, " mit 1.41... usw.

3.22. **Bem.:** Die Darstellung reeller Zahlen mit Dezimalbrüchen ist nicht eindeutig, da z.B. $0.9999\ldots = 1.000\ldots = 1$ ist, vgl. 7.21.

3.23. Beweis des Wohlordnungssatzes 3.11 ausführlich aufgeschrieben:

Bew.: Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, und sei $U := \{n \in \mathbb{N}_0;\ n \leq M\}$ die Menge der unteren Schranken von M in $\mathbb{N}_0$, sicher ist $0 \in U$, also $U \neq \emptyset$.

Beh.: $\exists m_0 \in U: m_0 + 1 \notin U$, denn sonst folgte induktiv $U = \mathbb{N}_0$ ⌈mit $0 \in U$ und $m_0 \in U \Rightarrow m_0 + 1 \in U$⌋.
Wegen (A) ist $\mathbb{N}_0$ nicht nach oben beschränkt, wohl aber U durch M laut Def. von U, falls $M \neq \emptyset$. ↯

Also folgt $m_0 \leq M$, $m_0 + 1 \not\leq M$, d.h. $m_0 \in M$. ⌈d.h. $\forall m \in M: m_0 \leq m$ und $\exists m_0 \in M: m_0 < m_0 + 1$, also $m_0 \leq m_0 < m_0 + 1 \Rightarrow m_0 = m_0 \in M$.⌋ Somit gilt: $m_0 \in M$ ist minimal in M. □

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 4: Komplexe Zahlen

Stichworte: Konstruktion, imaginäre Einheit, Rechenregeln, komplex Konjugiertes, Betrag, beschränkte Menge, komplexe Ebene, Real- und Imaginärteile

---

4.1. Einleitung: Wir führen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Paare reeller Zahlen ein. Mit der richtigen Definition für + und · ist $\mathbb{C}$ ein (kommutativer) Körper, in dem die Gleichung $x^2=-1$ zwei Lösungen hat. Wir erweitern so den Körper der reellen Zahlen. Die wichtigsten Rechenregeln für $\mathbb{C}$ werden notiert. [Hoff, §1.9]

4.2. Def: Sei $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ mit der Addition $(x,y)+(u,v) := (x+u, y+v)$

und der Multiplikation $(x,y)\cdot(u,v) := (xu-yv, xv+yu)$.

4.3. Bem.: Offensichtlich sind $(0,0)$, $(1,0)$ die neutralen Elemente bzgl. $+, \cdot$.

4.4. Satz: $\mathbb{C}$ ist ein (kommutativer) Körper, jedes $(a,b) \neq (0,0)$ hat das multiplikative Inverse $(a,b)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a,-b)$.

Bew.: Körperaxiome nachrechenbar, Inverses prüfen: $(a,b)\cdot\frac{1}{a^2+b^2}(a,-b) = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot(a^2-b\cdot(-b), a\cdot(-b)+ba)$

$= \frac{1}{a^2+b^2}(a^2+b^2, 0) = (1,0)$ ✓

4.5. Def.: Wir nennen $\mathbb{C}$ den Körper der komplexen Zahlen.

4.6. Bem.: Die Abbildung $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $r \mapsto (r,0)$ ist injektiv.

Außerdem gilt $\omega(a \overset{+}{\cdot} b) = \omega(a) \overset{+}{\cdot} \omega(b)$.

Wir fassen $\mathbb{R}$ somit als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf. (z.B. ist $1 := (1,0)$ etc.)

4.7. Def: Wir bezeichnen die komplexe Zahl $i := (0,1)$ als imaginäre Einheit.

4.8. Bem.: Für i gilt $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0) = -1$.

Damit lässt sich (a,b) schreiben als

$$(a,b) = (a,0)+(0,b) = a\cdot(1,0)+b\cdot(0,1) = a\cdot 1 + b\cdot i = a+bi.$$

4.9. Def.: Wir nennen $\operatorname{Re}((a,b)) = \operatorname{Re}(a+bi) := a$ den Realteil

und $\operatorname{Im}((a,b)) = \operatorname{Im}(a+bi) := b$ den Imaginärteil von $a+bi$.

Bsp.: $\operatorname{Re}(i)=0$, $\operatorname{Im}(i)=1$, $\operatorname{Re}(2-3i)=2$, $\operatorname{Im}(2-3i)=-3$.

4.10 **Def.:** Sei $z \in \mathbb{C}$, z.B. $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Dann heißt $\bar{z} := a - bi$ das zu z Konjugiert Komplexe.
Der Betrag von z ist definiert als $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.
(Für $z \in \mathbb{R}$ gilt dann $|z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$.)

4.11 Rechenregeln für das Rechnen in $\mathbb{C}$:

(1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, (2) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,

(3) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, (4) $\bar{\bar{z}} = z$,

(5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(7) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z} \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff \operatorname{Re} z = z$

(8) $\forall z \neq 0: \ \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ← Formel zum Invertieren Komplexer Zahlen $\neq 0$

(9) $\forall z \neq 0: (\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$

Bew.: (1): $\operatorname{Re}(a+ib) = a = \frac{1}{2}(a+ib+a-ib)$, (2): $\operatorname{Im}(a+ib) = b = \frac{1}{2i}(a+ib-(a-ib))$,

(3): $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$, (4): $\overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = a+ib$,

(5): $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{a_1 + ib_1 \pm (a_2 + ib_2)} = a_1 - ib_1 \pm a_2 \mp ib_2 = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$,

(6): $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)$

und $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = a_1a_2 + (-1)^2 b_1 b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1)$ " ✓

(7): $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zeigt, dass $z = a + ib \in \mathbb{R} \iff b = 0$,

(8): $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} \underset{(3)}{=} 1 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, (9): $1 = \bar{1} = \overline{z z^{-1}} \underset{(6)}{=} \bar{z} \cdot \overline{z^{-1}} \Rightarrow (\bar{z})^{-1} = \overline{z^{-1}}$. $\square$

4.12 Rechenregeln für den Betrag in $\mathbb{C}$:

(1) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \iff z = 0$

(2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Dreiecksungleichung

(3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(5) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

↑ Dreiecksungleichung "nach unten"

(6) $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$

Bew.: (1): $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(3): $|z_1 \cdot z_2|^2 \overset{4.11(3)}{=} z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} \overset{4.11(6)}{=} z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 \cdot z_2 \bar{z}_2 \overset{4.11(3)}{=} |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.

(2): $\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$$\overset{(1)}{\rightsquigarrow} \quad |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$
$$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$$
$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

also $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

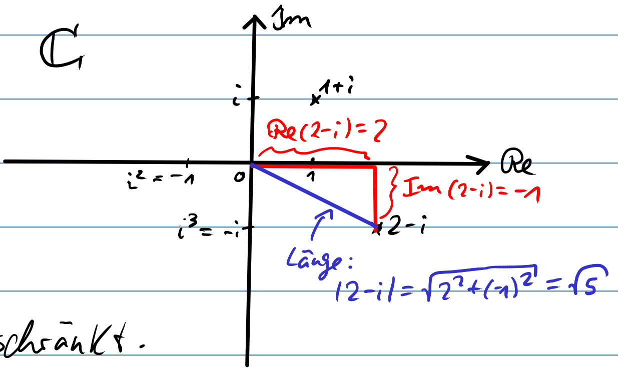
(4): $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ 4.11.(8)}}{=} \left|z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}\right| \underset{(3)}{=} \frac{1}{|z_2|^2} \cdot |z_1| \cdot \underbrace{|\bar{z}_2|}_{=|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

(5), (6): Genau wie in 2.13 (5), (6). ☐

4.13 **Def.:** $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt beschränkt, falls $\exists N > 0 \; \forall z \in M: |z| \leq N$.

(Dieser Begriff stimmt im Spezialfall $M \subseteq \mathbb{R}$ mit früherer Def. 3.4 überein.)

4.14 **Anschauung:** Komplexe Ebene:



Bsp.: Die Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\}$ ist beschränkt.

4.15 **Bem.:** $\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper in dem Sinne, dass es eine Relation "≤" gäbe, die mit den Körperaxiomen verträglich wäre.

Begründung ausführlich aufgeschrieben: Angenommen, es gäbe eine Relation "≤" in $\mathbb{C}$, also eine Teilmenge $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{C}$ so, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot, \mathbb{P})$ einen angeordneten Körper bildet.

Dann gelten die in 2.10 formulierten Rechenregeln. Haben $i \neq 0$, also ist $i > 0$ oder $i < 0$ (P1).

- Falls $i > 0$, gilt $i > 0 \underset{1 \cdot i > 0}{\Rightarrow} -1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. } i}}{=} i^2 > 0 \cdot i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{s.v. Nullpr.}}}{=} 0$ unter Verwendung von 2.10.(4), also ist $-1 > 0$ ↯.

- Falls $i < 0$, gilt $i < 0 \underset{1 \cdot i < 0}{\Rightarrow} -1 = i^2 > 0 \cdot i = 0$ unter Verwendung von 2.10(6), also ist $-1 > 0$ ↯.

Der Widerspruch $-1 > 0$ zeigt, dass die Annahme nicht gelten kann. ☐

Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 5: Folgen

Stichworte: Folgen, beschränkte Folgen, Nullfolgen, Konvergenz/Divergenz, Monotonie, Cauchy-Folgen, Grenzwertsätze/Sandwichlemma

---

5.1. Einleitung: Wir behandeln reell- oder komplexwertige Folgen. Über beschränkte Folgen und Nullfolgen gelangen wir zum Konvergenzbegriff. [Hoff, §3.1.1-3]

5.2. Def.: Sei $K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$, und $\mathcal{F}:=\mathcal{F}(\mathbb{N},K)=\{a:\mathbb{N}\to K\}$ die Menge aller K-wertigen Folgen. auch $\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_{\geq c}, \ldots$ möglich

5.3. Notationen: Sei $a\in\mathcal{F}$. Dann schreiben wir auch a_n statt $a(n)$, (a_n) statt a.

5.4. Def.: Seien $a,b\in\mathcal{F}$. Dann def. $(a\pm b)_n := a(n)\pm b(n) = a_n \pm b_n$

Sei $a\in\mathcal{F}$, $\alpha\in K$. Dann def. $(\alpha a)_n := \alpha\cdot(a(n)) = \alpha a_n$

Der Betrag einer Folge sei $|a|(n) := |a(n)| = |a_n|$

Für $K=\mathbb{R}$ ist $a\leq b \;:\Leftrightarrow\; \forall n\in\mathbb{N}: a(n)\leq b(n)$.

5.5. Bem.: $\mathcal{F}$ ist ein K-Vektorraum.

5.6. Def.: Falls $b(n)\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ist, dann def. $\left(\frac{1}{b}\right)(n) := \frac{1}{b(n)} = \frac{1}{b_n}$

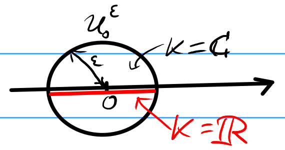
$$\Rightarrow \frac{a}{b} := a\cdot\frac{1}{b}$$

5.7. Bsp.: $\alpha\in K$, sei $a_n:=\alpha$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann heißt a konstante Folge.

5.8. Def.: $a\in\mathcal{F}$ heißt Nullfolge $:\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0: |a_n|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n\geq n_0: a_n\in\mathcal{U}_0^\varepsilon$$

5.9. Erläuterung: $\mathcal{U}_0^\varepsilon := \{z\in K;\ |z|<\varepsilon\}$ nennen wir ε-Umgebung von 0.



5.10. Def.: $a\in\mathcal{F}$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow a(\mathbb{N})$ beschränkt in K

$$\Leftrightarrow \exists M>0\ \forall n\in\mathbb{N}: |a_n|\leq M.$$

5.11. Notation: $\mathfrak{N} := \{\text{Nullfolgen}\}$, $\mathfrak{B} := \{\text{beschränkte Folgen}\}$.

5.12 Eigenschaften:

(1) $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{B}$, Bew.: $a \in \mathfrak{N} \Rightarrow \exists n_0 = n_0(1) : |a_n| < 1$ für alle $n \geq n_0$.

Sei $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1\}$.

Dann folgt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $a \in \mathfrak{B}$. □

(2) $\mathfrak{B}$ ist Untervektorraum von $\mathfrak{F}$.

Bew.: $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \Rightarrow (a_n) + (b_n) \in \mathfrak{B}$,

$|\alpha a_n| = |\alpha| \cdot |a_n| \Rightarrow \alpha(a_n) \in \mathfrak{B}$. □

(3) $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{N}$.

Bew.: $a \in \mathfrak{N}, b \in \mathfrak{B} \Rightarrow |a_n b_n| = |a_n| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq M} \leq |a_n| \cdot M$.

Aus $a \in \mathfrak{N}$ folgt:

$\exists n_0(\frac{\varepsilon}{M})\ \forall n \geq n_0 : |a_n b_n| \leq |a_n| \cdot M \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$

$\Rightarrow (a_n b_n) \in \mathfrak{N}$. □

(4) $\mathfrak{N}$ ist Untervektorraum von $\mathfrak{F}$.

Bew.: • Seien $a, b \in \mathfrak{N}$. $\exists n_0(\frac{\varepsilon}{2})\ \forall n \geq n_0 : |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

und $\exists n_1(\frac{\varepsilon}{2})\ \forall n \geq n_1 : |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sei $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Dann: $\forall n \geq n_2 : |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Also ist $(a_n) + (b_n) \in \mathfrak{N}$.

• Weiter (Œ $\alpha \neq 0$): $\exists n_0(\frac{\varepsilon}{|\alpha|})\ \forall n \geq n_0 : |\alpha a_n| = |\alpha| \cdot |a_n| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$.

Also ist $\alpha(a_n) \in \mathfrak{N}$. □

(5) $\forall a \in \mathfrak{N}\ \forall f \in \mathfrak{F}$ mit $|f| \leq |a|$ folgt $f \in \mathfrak{N}$. ✓

5.13 Beispiele: 1. $(\frac{1}{n}) \in \mathfrak{N}$, denn $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

2. Sei $q \in K$, $|q| < 1$, $|q^n| = |q|^n$. Dann ist $a \in \mathfrak{N}$ für $a_n := q^n$.

Bew.: $\exists n_0 : |q|^{n_0} < \varepsilon$ (wegen Hilfssatz 3.19 b)).

Dann folgt für $n \geq n_0$, dass $|q|^n \leq |q|^{n_0} \cdot 1^{n-n_0} = |q|^{n_0} < \varepsilon$. □

3. $(100 \cdot \frac{i^n}{n^2}) \in \mathfrak{N}$, denn $(100) \in \mathfrak{B}$,

und $\frac{i^n}{n^2} \in \mathfrak{N}$ da $|\frac{i^n}{n^2}| \leq \frac{1}{n} \in \mathfrak{N}$ wegen (5),

unter Verwendung von (3).

Sei $K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$, sowie $(a_n)\in\mathcal{F}$, $\alpha\in K$.

5.14. Def.: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \iff a_n\to\alpha \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$

$:\iff \forall \varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0:\ |a_n-\alpha|<\varepsilon.$

In Worten: (a_n) konvergiert gegen α, auch: strebt gegen α.

$\alpha\in K$ heißt Grenzwert (kurz: GW) der Folge (a_n).

5.15. Umformulierung:

$a_n\to\alpha \iff a_n-\alpha\in\mathcal{N} \iff$ jede ε-Umgebung $\mathcal{U}_\alpha^\varepsilon$ von α enthält fast alle a_n (d.h. alle bis auf endlich viele)

Dabei ist $\mathcal{U}_\alpha^\varepsilon := \{z\in K;\ |z-\alpha|<\varepsilon\}$.

5.16. Bezeichnung: a konvergent (kgt.) $\iff \exists\alpha\in K: a_n\to\alpha$,

ansonsten: a divergent (div.)

5.17. Def.: Sei $K=\mathbb{R}$. Dann heißt a nach oben beschränkt (n.o. beschr.), genau dann wenn $a(\mathbb{N})$ nach oben beschränkt ist.

- (a_n) heißt isoton (monoton nicht fallend), falls $\forall n: a(n+1)\geq a(n)$.
- (a_n) heißt antiton (monoton nicht wachsend), falls $\forall n: a(n+1)\leq a(n)$.
- (a_n) heißt monoton $:\iff (a_n)$ ist isoton oder antiton.

5.18. Eigenschaften:

(1) $a_n\to\alpha,\ a_n\to\alpha' \Rightarrow \alpha=\alpha'$ (Eindeutigkeit des Grenzwertes!)

Bew.: $\alpha-\alpha'=(a_n-\alpha')-(a_n-\alpha)\in\mathcal{N}\Rightarrow\alpha=\alpha'$. □

(2) 1.) $\mathcal{K}:=\{$Konvergente Folgen$\}$ ist Untervektorraum von $\mathcal{F}$.

2.) $L: \mathcal{K}\ni a\mapsto \lim\limits_{n\to\infty} a_n\in K$ ist K-lineare Abb.

Bew.: • $a_n\to\alpha,\ b_n\to\beta \Rightarrow (a_n-\alpha)+(b_n-\beta)\to 0 \iff (a_n+b_n)\to(\alpha+\beta)$.

• $\gamma\in K$: $\gamma a_n-\gamma\alpha=\gamma(a_n-\alpha)\in\mathcal{N}\iff\gamma a_n\to\gamma\alpha$. □

5.19. Def.: $\mathcal{F}\ni a$ heißt Cauchyfolge (CF)

$:\iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \forall n,m\in\mathbb{N}_{\geq n_0}:\ |a_n-a_m|<\varepsilon.$

Sei $\mathcal{C}:=\{CF\}$.

5.20. Bsp.: Konstante Folge $\in\mathcal{C}$. Bem.: Diese Def. kommt ohne der Nennung eines "GWes" $\alpha\in K$ aus.

5.21. **Satz:** $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$.

Bew.: • Sei $a \in \mathcal{K}$, $\varepsilon > 0$, $\alpha := \lim a_n$, d.h. $|a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$.

$\Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ mit $m, n \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$.

$\Rightarrow a \in \mathcal{C}$.

• Sei $b \in \mathcal{C}$, $\varepsilon = 1$, dann $\exists n_0(1)$: $|a_n - a_m| < 1$ für alle $m, n \geq n_0(1)$.

$\Rightarrow \big|\, |a_n| - |a_{n_0}| \,\big| \leq |a_n - a_{n_0}| < 1$ für alle $n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_n| \leq |a_{n_0}| + 1$ für alle $n \geq n_0$.

Sei $M := \max\{|a_{n_0}| + 1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\}$. $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq M \Rightarrow b \in \mathcal{B}$. □

Bem.: in 5.21 sind die Inklusionen "$\supseteq$" i.a. nicht gegeben.

5.22. **Satz:** Sei $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \ni a$ isoton und n.o. beschränkt.

Dann ist $a \in \mathcal{K}$ und $\lim a_n = \sup\{a_j;\, j \in \mathbb{N}\} =: s$.

Bew.: Es ist $a_n \leq s$, und $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N}: s - \varepsilon < a_n \leq a_m$ mit $m \geq n$.

Daraus folgt $|a_m - s| < \varepsilon$ für alle $m \geq n$, d.h. a konvergiert gegen s. □

5.23. **Kor.:** Vor.: $K = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \ni a$ antiton, n.u. beschr.

Beh.: $a \in \mathcal{K}$ und $\lim a_n = \inf\{a_j;\, j \in \mathbb{N}\}$.

1. **Bew.:** Analog zu Satz 5.22.
2. **Bew.:** $b = -a$ ist isoton und n.o. beschr. Dann folgt mit Satz 5.22:

$b \in \mathcal{K}$, $\lim b_n = \sup\{-a_j;\, j \in \mathbb{N}\} \underset{\uparrow \text{vgl. ü}}{=} -\inf\{a_j;\, j \in \mathbb{N}\} = -\lim a_n$. □

5.24. **Bsp.:** • $a_n := (-1)^n$ divergent

Denn: $|a_n - a_{n+1}| = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

• $\frac{n-1}{n} \to 1$, denn: $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

5.25. **Bem.:** Das Konvergenzverhalten von $a \in \mathcal{F}$ hängt nicht von endlich vielen Anfangstermen ab. Statt der Indexmenge $\mathbb{N}$ ist auch jedes $\mathbb{Z}_{\geq k}$, $k \in \mathbb{Z}$, zulässig.

5.26. **Grenzwertsätze:** Vor.: $a, b, c \in \mathfrak{F}$, $\alpha, \beta \in K$, $a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$.

Beh.: (a) $a_n b_n \to \alpha\beta$

(b) $|a_n| \to |\alpha|$

(c) Falls $\beta \neq 0$, so $\exists n_1\ \forall n \geq n_1: b_n \neq 0$ und $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{\beta}$.

(c') Falls $\beta \neq 0$, so $\exists n_1\ \forall n \geq n_1: \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\alpha}{\beta}$.

(d) Falls $K = \mathbb{R}$, so $(\forall n: a_n \leq b_n \Rightarrow \alpha \leq \beta)$.

(d') Falls $K = \mathbb{R}$, so: $(\forall n: a_n < b_n \not\Rightarrow \alpha < \beta)$.

(e) Falls $K = \mathbb{R}$, so: $(\forall n: a_n \leq c_n \leq b_n,\ \beta = \alpha \Rightarrow c_n \to \alpha)$.

("Sandwichlemma")

Bew.: (a):

$$\underbrace{\underbrace{(a_n - \alpha)}_{\overset{\cap}{\mathfrak{N}}} \underbrace{b_n}_{\overset{\cap}{\mathfrak{B}}}}_{\in \mathfrak{N}} + \underbrace{\alpha \cdot b_n}_{\overset{\cap}{\mathfrak{K}}} = a_n b_n \longrightarrow 0 + \alpha\beta = \alpha\beta$$

$\ulcorner$ausführlich aufgeschrieben: Wir schreiben $a_n b_n = (a_n - \alpha) \cdot b_n + \alpha \cdot b_n$.
Da $a_n \to \alpha$, ist $a_n - \alpha \in \mathfrak{N}$ laut 5.15. Da $b_n \to \beta$, ist $b_n \in \mathfrak{B}$ laut 5.21.
Somit ist $(a_n - \alpha) \cdot b_n \in \mathfrak{N}$ laut 5.12 (3). Weiter ist $\alpha \cdot b_n \in \mathfrak{K}$,
und dann auch $\underbrace{(a_n - \alpha) \cdot b_n}_{\in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{K}} + \underbrace{\alpha \cdot b_n}_{\in \mathfrak{K}} \in \mathfrak{K}$ wegen 5.18 (2) 1.).
Der Grenzwert ist $0 + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$. $\lrcorner$

(b): $\big|\, |a_n| - |\alpha| \,\big| \leq |a_n - \alpha| \to 0$

(c): $\exists n_0\left(\frac{|\beta|}{2}\right)\ \forall n \geq n_0: \quad |\beta| - |b_n| \leq \frac{|\beta|}{2} \Rightarrow 0 < \frac{|\beta|}{2} \leq |b_n|$.

$$\Rightarrow \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - b_n}{b_n \beta} = \underbrace{(\beta - b_n)}_{\in \mathfrak{N}} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_n \beta}}_{\in \mathfrak{B}} \in \mathfrak{N}.$$

(d): $\underbrace{b_n - a_n}_{=: c_n \geq 0} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \beta - \alpha =: \gamma \geq 0$

$\overset{!}{\Rightarrow} \gamma \geq 0$. Sonst: $\gamma < 0$, $\exists n_1\ \forall n \geq n_1: c_n \leq \frac{\gamma}{2} < 0$, ↯.

(d'): $b_n = \frac{1}{n} > 0 = a_n = \alpha$

$\downarrow$

$0 = \alpha = \beta$

(e): Sei OE $0 \leq c_n \leq b_n$, $\beta = 0 \overset{5.12.(5)}{\Rightarrow} c_n \in \mathfrak{N}$. □

5.27. **Bsp.:**

$$\frac{6n^3 - 4n + 9}{5n^3 + 10n^2} = \frac{n^3 \cdot \left(6 - \frac{4}{n^2} + \frac{9}{n^3}\right)}{n^3\left(5 + \frac{10}{n}\right)} = \frac{6 - \frac{4}{n^2} + \frac{9}{n^3}}{5 + \frac{10}{n}} \xrightarrow[\text{Grenzwertsätze 5.26}]{n \to \infty} \frac{6 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{6}{5}.$$

Vorlesung Analysis I   WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An6: Teilfolgen, Eigenschaften von Folgen

Stichworte: Teilfolgen, Bolzano-Weierstraß, Vollständigkeitssatz, bestimmte Divergenz, Häufungswerte, limsup und liminf

---

6.1. Einleitung: Die Untersuchung konvergenter Teilfolgen von u.U. divergenten Folgen führt zum Satz von Bolzano-Weierstraß. Wir erhalten, dass $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ vollständig ist in dem Sinne, dass jede Cauchyfolge konvergiert. Wir diskutieren auch bestimmte Divergenz, den Limes superior und Limes inferior. [Hoff, § 3.14/5]

6.2. Bezeichnung: $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist streng isoton, falls $\forall k \in \mathbb{N} : \varphi(k) < \varphi(k+1)$.

Falls $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n_k := \varphi(k)$: $n_k < n_{k+1} < n_{k+2} < \dots$ (vgl. 5.17)

6.3. Teilfolge (TF): Seien $a \in \mathcal{F}$, $b \in \mathcal{F}$.

Def.: $b \in \mathcal{F}$ heißt Teilfolge (TF) von a, falls

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ streng isoton mit } b = a \circ \varphi, \text{ d.h. } b_k = a_{\varphi(k)}.$$

$\Rightarrow b(k) = a_{\varphi(k)} = a_{n_k}$.

Bem.: Mit $a \circ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Kompositionsabbildung $a \circ \varphi(k) = a(\varphi(k))$.

6.4. Bem.: Vor.: $a, b \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, b ist TF von a.

Beh.: $a_n \to \alpha \Rightarrow b_n \to \alpha$.

Bew.: $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$

$\Rightarrow |b_k - \alpha| < \varepsilon$ für alle $k \geq n_0(\varepsilon)$. $\square$

6.5. Hilfssatz: Vor.: $\alpha, \beta, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Bez.: $c_n := a_n + i b_n$, $\gamma := a + ib$.

Beh.: 1.) $c_n \in \mathcal{B} \Leftrightarrow a_n, b_n \in \mathcal{B}$.

$c_n \in \mathcal{N} \Leftrightarrow a_n, b_n \in \mathcal{N}$.

2.) $c_n \to \gamma \Leftrightarrow a_n \to \alpha,\ b_n \to \beta$.

3.) $c_n \to \gamma \Leftrightarrow \overline{c_n} \to \overline{\gamma}$.

Bew.: Sei $z \in \mathbb{C}$. 1.) $\Rightarrow \max(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$, $|z| = |\overline{z}|$.

2.) $c_n - \gamma \in \mathcal{N}$, $a_n - \alpha \in \mathcal{N}$, $\beta_n - \beta \in \mathcal{N}$, $\alpha, \beta, \gamma = 0$

3.) Wegen $|z| = |\overline{z}|$. $\square$

6.6. **Bem.:** Jede reellwertige Folge besitzt eine monotone Teilfolge.

Bew.: $a \in \mathcal{F}$. Es heiße $n \in \mathbb{N}$ Gipfelpunkt von a, falls $\forall m > n: a_m < a_n$.

1. Fall: $\exists \infty$ viele Gipfelpunkte: $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

$\Rightarrow a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots$ antitone TF von a

2. Fall: $\exists n_1', n_2', \dots, n_r'$: $a_{\underbrace{n_r'+1}_{=:n_1}} \leq a_{n_2} \leq a_{n_3} \leq \dots$ isotone TF. □

6.7. **Satz von Bolzano-Weierstraß (B-W):**

Jede $\mathbb{K}$-wertige beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bew.: $\mathcal{F} \ni c = a + ib$ beschränkt, $a, b \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

$\Rightarrow a, b$ beschr. $\Rightarrow \exists \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: a \circ \varphi$ monoton, beschr. $\Rightarrow$ kgt.

$\exists \psi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}: b \circ \varphi \circ \psi$ monoton, beschr. $\Rightarrow$ kgt.

$\Rightarrow c \circ \varphi \circ \psi$ ist kgt. □

6.8. **Hilfssatz:** Sei a TF einer Cauchyfolge, $a \in \mathcal{K} \Rightarrow$ CF $\in \mathcal{K}$ mit gleichem Limes.

Bew.: Sei c_n die CF. Dann $\exists n_0(\frac{\varepsilon}{2})\ \forall n, m \geq n_0: |c_n - c_m| < \frac{\varepsilon}{2}$,

$\exists m_k: |c_{m_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$, m_k groß, OE $m_k \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$.

$\Rightarrow |c_n - \alpha| \leq |c_n - c_{m_k}| + |c_{m_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

6.9. **Vollständigkeitssatz:** $\mathcal{C} = \mathcal{K}$.

Bew.: $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{K}$ schon gezeigt, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{K}$ wegen 6.8 und 6.7 (=B-W) □

6.10. **Beispiele:**

1.) $x_0 := 1$, $x_{n+1} := (1 + x_n)^{-1}$. Induktion zeigt: $x_n > 0$, $x_n < 1$, $x_n \geq \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow |x_{n+k+1} - x_{n+1}| = \left| \frac{1}{1 + x_{n+k}} - \frac{1}{1 + x_n} \right| = \left| \frac{x_n - x_{n+k}}{(1 + x_{n+k})(1 + x_n)} \right| \underset{\uparrow}{\leq} \frac{4}{9} |x_n - x_{n+k}|.$$

$\llcorner 1 + x_{n(+k)} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\overset{\text{VI nach n}}{\Rightarrow} |x_{n+k} - x_n| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot |x_k - x_0| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow x_n \text{ ist CF.}$$

$$\overset{6.9}{\Rightarrow} \exists a, \mathbb{R} \ni a \leftarrow x_n \underset{5.26,\ a \neq -1}{\overset{\text{GWsätze}}{\Rightarrow}} a = \frac{1}{1+a} \Rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \underset{(-)}{+} \frac{\sqrt{5}}{2}$$

($a > 0$ wegen $x_n > 0$)

Sozusagen: $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+1}}} \text{ "=" } \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

2.) $c > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{c} \to 1$

Bew.: 1. Fall: $c = 1$ ✓

2. Fall: $c > 1$: Sei $\delta_n := \sqrt[n]{c} - 1 > 0$. $\Rightarrow (1+\delta_n)^n \overset{\text{Bernoulli: 2.10 (14)}}{\geq} 1 + n\underbrace{\delta_n}_{\to 0}$ für alle n $\Rightarrow$ Beh.

Sonst r.S. unbeschr., ↯ da l.S. $= c$

3. Fall: $0 < c < 1$: Es ist $\frac{1}{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[n]{\underbrace{\tfrac{1}{c}}_{>1}} \xrightarrow{} 1 \Rightarrow \sqrt[n]{c} \to 1$. (nach 2. Fall)

$\square$

3.) $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Bew.: Sei $\delta_n := \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Dann ist $n = (1+\delta_n)^n \overset{2.19}{\geq} 1 + \binom{n}{2}\delta_n^2$ $\quad (n \geq 2)$

$\Rightarrow n - 1 \geq \frac{n}{2}(n-1)\delta_n^2 \Rightarrow 1 \geq \frac{n}{2}\underbrace{\delta_n^2}_{\to 0} \Rightarrow$ Beh.

Sonst r.S. unbeschr. ↯

$\square$

6.11. Bestimmte Divergenz

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{F}$.

Def.: Bestimmte Divergenz:

$a_n \to \infty :\Leftrightarrow \forall K > 0 \ \exists n_0(K) \ \forall n \geq n_0(K): a_n \geq K$

$a_n \to -\infty :\Leftrightarrow \forall K > 0 \ \exists n_0(K) \ \forall n \geq n_0(K): a_n \leq -K$.

6.12. **Bem.:**

0) $a_n \to \infty \Leftrightarrow -a_n \to -\infty$

1) $a_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$

1') $a_n \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$

2) $0 < a_n$, $a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to \infty$

2') $0 > a_n$, $a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to -\infty$

„Stenographie": $\underbrace{\frac{1}{\infty} = 0}_{\text{für 1)}}$, $\underbrace{\frac{1}{-\infty} = 0}_{\text{für 1')}}$, $\underbrace{\frac{1}{0^+} = \infty}_{\text{für 2)}}$, $\underbrace{\frac{1}{0^-} = -\infty}_{\text{für 2')}}$.

6.13. Für $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt:

$\gamma \cdot \infty = \infty, \ \gamma > 0$ $\qquad \gamma \cdot (-\infty) = -\infty, \ \gamma > 0$

$\gamma \cdot \infty = -\infty, \ \gamma < 0$ $\qquad \gamma \cdot (-\infty) = \infty, \ \gamma < 0$

$\infty \cdot \infty = \infty, \ (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$

$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$

$\gamma + \infty = \infty, \ \gamma + (-\infty) = -\infty$

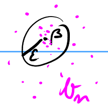
⚠ Diese Aussagen gelten nur für bestimmte Divergenz in den hier angegebenen Versionen!

Beachte z.B.: $0 \cdot \infty$ ist nicht erklärbar, da z.B. $\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{n^2}_{\to \infty} = n \to \infty$, $\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sqrt{n}}_{\to \infty} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ gilt.

Häufungswerte von Folgen, lim sup, lim inf:

Haben:

Bolzano-Weierstraß: (a_n) beschr. $\Rightarrow \exists$ TF (b_n) von (a_n) mit $b_n \to \beta$.

$\varepsilon > 0$: $\mathcal{U}_\beta^\varepsilon$: 

β HW von b_n : $\underbrace{\forall N \ \exists n \geq N : b_n \in \mathcal{U}_\beta^\varepsilon}_{\text{"die } b_n \text{ kommen } \beta \text{ beliebig nahe"}}$.

6.14. **Def.:** $\alpha \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert der Folge (a_n), falls: (Kurz: HW)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N : |a_n - \alpha| < \varepsilon .$$

Bem.: $\alpha \in \{\text{HW von } (a_n)\} \Leftrightarrow \exists$ TF (b_n) von (a_n) mit $b_n \to \alpha$.

Bew.: „⇒": Sei α ein HW, $\varepsilon = \frac{1}{j}$. Dann $|a_{n_j} - \alpha| < \frac{1}{j}$ für ein $n_j \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow (b_n) := (a_{n_j})$ ist TF von (a_n) mit $b_n \to \alpha$.

„⇐": Sei (b_n) TF von (a_n) mit $b_n \to \alpha$.

Konvergenz von $b_n \Rightarrow \alpha$ ist HW von (a_n) per Def. □

Der Satz von Bolzano-Weierstraß lässt sich dann umformulieren:

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen Häufungswert.

6.15. **Der Limes superior:** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (a_n) beschränkt.

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $b_m := \sup\{a_j ; j \geq m\}$, also $a_m \leq b_m$.

Es gilt: b_m ist antiton, für $m \mapsto m+1$ unmittelbar ersichtlich.

Sei $s := \lim\limits_{m \to \infty} b_m = \inf\{b_m ; m \in \mathbb{N}\} = \inf\limits_m \{\sup\limits_j \{a_j ; j \geq m\}\}$

Def.: $\limsup a_j = \overline{\lim}\, a_j := s = \inf\limits_m \{\sup\limits_j \{a_j ; j \geq m\}\}$

heißt Limes superior von (a_n).

Anschaulich: größter HW

6.16. **Bem.:** Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann:

$\alpha = \limsup a_j$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \begin{cases} a_n \leq \alpha + \varepsilon \text{ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen,} \\ \text{und } a_n > \alpha - \varepsilon \text{ für unendlich viele } n. \end{cases}$

Bew.: „⇐": • $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N: \ a_n \leq \alpha + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0: s \leq \alpha + \varepsilon.$

$\Rightarrow s \leq \alpha$ (wegen „$\forall \varepsilon > 0$", nach 2.10.(13))

• $\forall m\ \exists n \geq m: \ a_n > \alpha - \varepsilon$

$\Rightarrow b_m > \alpha - \varepsilon$ wegen $a_n \leq b_m$

$\Rightarrow \quad s \geq \alpha - \varepsilon$

$\Rightarrow \quad s \geq \alpha.$

• Aus $s \leq \alpha$ und $s \geq \alpha$ folgt $\alpha = s = \limsup a_j$.

„⇒": Sei $\varepsilon > 0$, $s = \alpha$.

• $\forall m: \ b_m \geq s > s - \varepsilon$

$\Rightarrow \exists n \geq m: \ a_n > s - \varepsilon$, also 2. Zeile der Beh.

• Da $b_m \to s$ $\exists k$ mit $b_k < s + \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq k$ gilt $a_n \leq b_k < s + \varepsilon$, also 1. Zeile.

□

6.17. Analog sei der Limes inferior von (a_n) definiert als

$$\liminf a_j = \underline{\lim}\, a_j := \sup_m \{ \inf_j \{a_j;\ j \geq m\} \}.$$

6.18. Ist (a_n) nach oben beschränkt und isoton, so ex. $\limsup a_n \in \mathbb{R}$.

Ist (a_n) nach unten beschränkt und antiton, so ex. $\liminf a_n \in \mathbb{R}$.

Vereinbarung:

Ist (a_n) nicht nach oben beschränkt, so sei $\limsup a_n = \infty$.

Ist (a_n) nicht nach unten beschränkt, so sei $\liminf a_n = -\infty$.

6.19. **Bsp.:** 1.) $a_n = (-1)^n$: $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$.

2.) $a_n = n(-1)^n$: $\limsup a_n = \infty$, $\liminf a_n = -\infty$.

6.20. Bew. von Hilfssatz 6.8 ausführlich aufgeschrieben:

Sei (c_n) eine Cauchyfolge mit konvergenter Teilfolge (c_{n_k}), die gegen α konvergiere. Sei $\varepsilon > 0$.

Da (c_n) CF, ex. ein $n_0(\frac{\varepsilon}{2})$ so, dass $|c_n - c_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$ gilt. ①

Da (c_{n_k}) gegen α kgt., ex. ein k so, dass für alle $l \geq k$ weiter $|c_{n_l} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. ②

Ohne Einschränkung sei $n_k \geq n_0(\frac{\varepsilon}{2})$ gewählt [sonst wähle n_k größer; (n_k) ist streng isoton].

Dann gilt für alle $n \geq n_k$, dass $|c_n - \alpha| \underset{\substack{\uparrow \\ \triangle\text{-Ungl.}}}{\leq} |c_n - c_{n_k}| + |c_{n_k} - \alpha| \underset{①,②}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Dies zeigt, dass (c_n) gegen α konvergiert. □

Vorlesung Analysis I WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An7: Reihen

Stichworte: Reihen-Konvergenzsätze, Cauchy-Kriterium, alternierende Reihen/Leibniz-Kriterium, Majoranten-/Wurzel-/Quotienten-Kriterium, Umordnungssatz, Cauchy-Produktsatz [Hoff, §3.2]

7.1. **Einleitung:** Reihen sind spezielle Folgen, die aus einer "Summanden"folge gebildet werden. Wir behandeln verschiedene Kriterien zu ihrer Konvergenz. Der Cauchy-Produktsatz besagt, wie das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen gebildet wird.

$\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathbb{N}_0, \mathbb{K})$ ← beginnen bei 0

7.2. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Betr.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "S"] & \mathcal{F} \\ a \arrow[r, mapsto] & R_a \end{tikzcd}$$ mit $R_a(n) := \sum_{j=0}^{n} a_j$

7.3. **Bem.:** S ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum-Isomorphismus.

Bew.: • S ist linear: $R_{(\alpha a + b)}(n) = \sum_{j=0}^{n} (\alpha a_j + b_j) = \alpha \sum_{j=0}^{n} a_j + \sum_{j=0}^{n} b_j = \alpha R_a(n) + R_b(n)$

• S ist bijektiv: $\exists S^{-1}$, denn $\forall s \in \mathcal{F}\ \exists a \in \mathcal{F} : S(a) = s$,
nämlich $a_0 := s_0$, $n \geq 1 : a_n = s_n - s_{n-1}$.

7.4. **Def.:** • $R_a(n)$ heißt n-te Partialsumme (von a). Schreibe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, bzw. $\sum_{j\geq 0} a_j$ statt R_a.
Wir nennen so eine Folge von Partialsummen eine Reihe.

- $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ kgt. (div./best. div.) $:\Leftrightarrow$ R_a kgt. (div./best. div.)
- $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \alpha \in \mathbb{K}$, falls $R_a \to \alpha$.
- $k \in \mathbb{Z}$: schreibe $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ mit naheliegender Bedeutung.

7.5. Sei $a, b \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Ergibt: 5.18(1) $\Rightarrow$ ① Eine Reihe hat höchstens einen GW.

5.18(2) $\Rightarrow$ ② $\mathcal{R}_k := \{a \in \mathcal{F} : R_a \text{ kgt.}\}$ ist UVR von $\mathcal{F}$,

$\ell : \mathcal{R}_k \to \mathbb{K}$, $a \mapsto \lim_{n\to\infty} R_a(n)$ ist $\mathbb{K}$-linear.

D.h.: Ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ Kgt., so Kgt. auch $\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + b_j)$,

und $\sum_{j=0}^{\infty}(\alpha a_j + b_j) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j$. [→ vgl. mit Def. "lineare Abb." in LA I!]

7.6. Bem.: Satz 5.22 zeigt:

Vor.: $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \geq 0$.

Beh.: R_a Kgt. $\Leftrightarrow$ R_a (n.o.) beschr.

Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sup\{\sum_{j=0}^{N} a_j ; N \in \mathbb{N}_0\}$.

7.7. Bem.: GWsatz 5.26(d) zeigt:

Vor.: $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $\forall n : a_n \leq b_n$.

Beh.: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ Kgt. $\Rightarrow$ $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=0}^{\infty} b_j$.

7.8. Bem.: Bem. 6.4 zeigt:

Vor.: $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ streng isoton, $\varphi(0) = 0$

Beh.: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ Kgt. $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} a_j\right)$ Kgt. mit gleichem Limes

Bew.: $\sum_{n=0}^{K}\left(\sum_{j=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} a_j\right) = \sum_{j=0}^{\varphi(K+1)-1} a_j = R_a(\varphi(K+1)-1)$ ist T.F. von R_a. □

7.9. Bem.: Hilfssatz 6.5 zeigt:

Vor.: $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $c_n := a_n + i b_n \in \mathbb{C}$.

Beh.: 1) $\sum c_j$ Kgt. $\Leftrightarrow$ $\sum a_j$, $\sum b_j$ Kgt.

2) $\sum c_j$ Kgt. $\Rightarrow$ $\sum c_j = \sum a_j + i \sum b_j$

3) $\sum c_j$ Kgt. $\Rightarrow$ $\sum \overline{c_j}$ Kgt., $\sum \overline{c_j} = \overline{\sum c_j}$

7.10. Der Vollständigkeitssatz 6.9, nämlich $\mathbb{C} = \mathcal{K}$,

zeigt das Cauchy-Kriterium (C.K.):

Beh.: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ Kgt. $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \; \forall n \geq n_0(\varepsilon) \; \forall p \in \mathbb{N}$:

$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} a_j\right| < \varepsilon$.

Bew.: $|R_a(n+p) - R_a(n)| < \varepsilon$. □

7.11. **Folgerung**: Notwendiges Konvergenzkriterium:

$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ Kgt. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $a_j \to 0$. **Bew.:** C.K. für $p=1$.

Nicht hinreichend, denn: harmonische Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ div. bestimmt.

⌜ $\sum_{j=m+1}^{2m} \frac{1}{j} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$, ↯ zu C.K.

Anders argumentiert: $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{>4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{>8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{>2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}} + \dots > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots}_{\to\infty}$ ⌟

7.12. **Def.**: $a \in \mathcal{F}$ heißt alternierend, wenn bei $n \to n+1$ ein Vorzeichenwechsel auftritt.
(D.h. wenn $\forall n: a_n \cdot a_{n+1} < 0$ ist.)

7.13. Leibnizkriterium: Vor.: $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n: a_n > 0$, (a_n) antiton, $a_n \to 0$.

Beh.: $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$ Kgt.

Sei α der Limes, dann: $\left|\alpha - \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j\right| \leq a_{n+1}$.

Bew.: Sei $s_n := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j$.

Dann: 1.) $s_{2m+2} = s_{2m} \underbrace{- a_{2m+1} + a_{2m+2}}_{\leq 0} \leq s_{2m}$ $\Rightarrow$ s_{2m} ist antiton.

$s_{2m} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m} \geq 0$.

Also: $s_{2m} \in \mathcal{B} \Rightarrow s_{2m} \to \alpha$.

2.) $s_{2m+1} = s_{2m} - a_{2m+1} \to \alpha - 0 = \alpha$

$s_{2m+1} = s_{2m-1} \underbrace{+ a_{2m} - a_{2m+1}}_{\geq 0} \geq s_{2m-1} \Rightarrow s_{2m+1}$ ist isoton.

$\Rightarrow$ $s_{2m+1} \leq \alpha \leq s_{2m}$.

Somit: $|\alpha - s_{2m+1}| = \alpha - s_{2m+1} \leq s_{2m+2} - s_{2m+1} = a_{2m+2}$,
$|\alpha - s_{2m}| = s_{2m} - \alpha \leq s_{2m} - s_{2m+1} = a_{2m+1}$.

□

7.14. **Bsp.**: $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cdot \frac{1}{j}$ Kgt., aber nicht $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$.

7.15. **Bezeichnung**: R_a heißt absolut Kgt., falls $R_{|a|}$ Kgt.

7.16. **Satz**: $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ Kgt. $\Rightarrow$ $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ Kgt.

Bew.: C.K.:

$\left|\sum_{j=n+1}^{n+p} a_j\right| \leq \sum_{j=n+1}^{n+p} |a_j| \Rightarrow$ Konvergenz. Sei $n=0$, $p \to \infty$: $\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$. □

An 7

- 4 -

7.17 Seien $a, b \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Majorantenkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ Kgt., fast alle n: $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ Kgt.

Bew.: $R_a(n) = \sum_{j=0}^{n} |a_j|$ ist eine isotone beschränkte Folge. Jetzt Satz 5.22. $\square$

7.18. **Minorantenkriterium:** $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = \infty$, fast alle n: $|a_n| \geq |b_n| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$.

Bew.: Ann.: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ Kgt. $\underset{7.17}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ Kgt., $\lightning$ $\square$

7.19. **Bsp.:** Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ist (abs.) Kgt.

$k = 2$: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j^2}}_{=:S}$ und $S \leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 2$. Jetzt 7.6 anwenden.

$k \geq 2$: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^k}$ $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $\Rightarrow$ Kgz. mit Majorantenkriterium 7.17. $\square$

7.20. **Wurzelkriterium:** Vor.: $\exists\, 0 \leq q < 1$, fast alle n: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ $(*)$.

Beh.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist abs. Kgt.

Bew.: OE $a_n \geq 0$, $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq q^n$. Konvergenz durch 7.17 mit $b_n := q^n$. $\square$

Dabei wurde verwendet:

7.21 **Geometrische Reihe:** Sei ~~$-1<q$~~ <1. Dann: $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} q^j \overset{\text{endliche geom. }\Sigma}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{k\to\infty} \frac{1-q^{k+1}}{1-q} \underset{\text{da } q^k \to 0}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{1-q}$.

auch $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$

7.22 **Quotientenkriterium:** Vor.: $\exists\, 0 \leq q < 1$, fast alle n: $|a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot q$ $(*)$.

Beh.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist abs. Kgt.

Bew.: Sei OE $a_n \geq 0$, $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow a_n \leq q^n a_0$. M.K. 7.17 mit $b_n := a_0 q^n$ zeigt Kgz. $\square$

7.23 **Bsp.:** 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ ist abs. Kgt.:

Q.K. 7.22: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$

$\overset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{1+n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$.

(Bernoulli)

$\Rightarrow$ Q.K. mit $q = \frac{1}{2}$ führt auf Kgz.

2) $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ ist abs. Kgt.:

W.K. 7.20: $\sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n^n}} = \frac{|z|}{n} < \frac{1}{2}$ falls $n > 2|z|$.

$\Rightarrow$ W.K. mit $q = \frac{1}{2}$ führt auf Kgz.

3) $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist abs. Kgt. $\forall z \in \mathbb{C}$:

Q.K. 7.22: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|z|}{n+1} < \frac{1}{2}$, falls n hinreichend groß.

! Wir nennen $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z)$, die Exponentialfunktion.

7.24 **Bem.:** All diese Kriterien sind hinreichend, aber nicht notwendig.

Denn: $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist Kgt., s. Bsp. 7.19 mit $k=2$ bzw. Bsp. 7.26 mit $\alpha = 2$.

Aber: • Es ist $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$, d.h. W.K. versagt.

• Es ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \longrightarrow 1$, d.h. Q.K. versagt.

Ein Kriterium, das hinreichend und notwendig ist, lautet:

7.25 **Satz** (Cauchysches Verdichtungskriterium):

Vor.: $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n \geq 0$, (a_n) antiton, $a_n \to 0$. Beh.: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Kgt. $\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}}_{\text{“verdichtete Reihe”}}$ Kgt.

Bew. (ausführlich aufgeschrieben): Sei $S_n = R_a(n)$ die n-te Partialsumme von (a_n), und T_k die k-te Partialsumme von $(2^k a_{2^k})$.

„$\Leftarrow$“: Für $n \leq 2^k$ gilt
$$S_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1})$$
$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} = T_k. \quad ①$$

Nach Vor. bei „$\Leftarrow$“ ist T_k beschränkt, wegen der Abschätzung ① also auch S_n.

Wegen Bem. 7.6 ist $(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ somit Kgt.

„$\Rightarrow$“: Für $n > 2^k$, $k > 0$, gilt:
$$S_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k})$$
$$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} T_k. \quad ②$$

Nach Vor. bei „$\Rightarrow$“ ist S_n beschränkt, wegen der Abschätzung ② also auch T_k.

Wegen Bem. 7.6 ist $(T_k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ somit Kgt. □

7.26 **Bsp.:** Sei $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{Q}$. Dann gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ Kgt. $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

$\alpha \in \mathbb{Q}$: vgl. Bem. in 3.14

Bew.: Laut Cauchy-Verdichtungssatz 7.25 ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ Kgt. $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k}_{\text{geom. }\Sigma}$ Kgt.

• Ist $\alpha > 1$, folgt $2^{\alpha-1} > 1$, mit $q := \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ greift das Q.K. 7.22 $\to$ Kgz.

• Ist $\alpha \leq 1$, folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, laut Minorantenkrit. 7.18 folgt Divergenz. □

7.27. **Umordnungssatz**: Sei $(a_n) \in \mathcal{F}$, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere absolut, $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei bijektiv. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut konvergent, und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Bew.: $\sum_{j=0}^{n} |a_{\varphi(j)}| \le \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_{\varphi(j)}$ ist abs. kgt.

Zeige jetzt: Die Folge (d_n) mit $d_n := \sum_{j=0}^{n} a_{\varphi(j)} - \sum_{j=0}^{n} a_j$ ist eine Nullfolge.

Es ist $d_n = \sum_{j=0}^{k_n} \delta_j a_j$ mit $k_n := \max\{n, \varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$, mit irgendwelchen $\delta_j \in \{0, 1, -1\}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_1 : \sum_{j=n_1}^{n} |a_j| < \varepsilon$.

Wähle n_0 so, dass $n_0 \ge n_1$ und $\{0, 1, \dots, n_1\} \subseteq \varphi(\{0, 1, \dots, n_0\})$.

Sei $n \ge n_0$.

Dann ist $d_n = \sum_{j=0}^{k_n} \delta_j a_j$ mit $\delta_j = 0$ für $j \le n_1$.

Daraus folgt:

$$|d_n| = \Big|\sum_{j=0}^{k_n} \delta_j a_j\Big| = \Big|\sum_{j=n_1+1}^{k_n} \delta_j a_j\Big| \le \sum_{j=n_1+1}^{k_n} |\delta_j a_j| \le \sum_{j=n_1+1}^{k_n} |a_j| < \varepsilon. \quad \Box$$

7.28. **Cauchy-Produktsatz**:

Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergente Reihen.

⌜Es reicht, dass nur $\sum a_j$ abs. kgt., $\sum b_j$ kgt. (ohne Beweis) [Mertens 1875]⌟

Es sei $(c_n) \in \mathcal{F}$ die Folge $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (das Cauchyprodukt der Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$) absolut konvergent, und es gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$.

Bew.: • Sei $A := \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$, $B := \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \in \mathbb{R}$.

Dann ist

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| \le \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| \le \sum_{i=0}^{m} |a_i| \sum_{j=0}^{m} |b_j| \le A \cdot B.$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist absolut kgt.

• Zeige jetzt: Die Folge (d_m) mit $d_m := \sum_{n=0}^{2m} c_n - \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{m} b_j$ ist eine Nullfolge.

⌜Es ist $d_m = \sum_{n=m+1}^{2m} \sum_{\substack{i+j=n \\ i \ge m+1 \\ \text{oder } j \ge m+1}} a_i b_j$

$$= \sum_{i=m+1}^{2m} \sum_{j=0}^{2m-i} a_i b_j + \sum_{j=m+1}^{2m} \sum_{i=0}^{2m-j} a_i b_j,$$

wobei $i + j \le 2m$, d.h. $j \le 2m - i$, $i \le 2m - j$.

Daraus folgt: $d_m \le \underbrace{\sum_{i=m+1}^{2m} |a_i|}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0} \cdot B + \underbrace{\sum_{j=m+1}^{2m} |b_j|}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0} \cdot A \xrightarrow{m\to\infty} 0.$ ⌟ $\Box$

Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An8: Die Funktionen exp, cos, sin, Teil I

Stichworte: Exponentialreihe, Winkelfunktionen, Eigenschaften, Zahl e, Funktionen sin/cos, Additionstheoreme [Hoff, §3.3.2, S. 134-6]

8.1. **Einleitung:** Wir tragen die wichtigsten Eigenschaften der (komplexen) Exponentialfunktion zusammen. Die Funktionen, die als Real- und Imaginärteil davon erklärt werden, sind die Winkelfunktionen Cosinus und Sinus. Sie gelten als Prototyp für die Beschreibung von Schwingungen und haben etliche Eigenschaften, z.B. die Additionstheoreme.

8.2. **Bem.:** Für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut. ⌜Bsp. 7.23.3)⌟

8.3. **Def.:** Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist die Funktion $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

8.4. **Eigenschaften der Exponentialfunktion:**

(1) $\exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. (2) $\exp(0) = 1$.

(3) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ "Funktionalgleichung von exp"

Bew.: $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!}$$
$$\overset{7.28}{\overset{\downarrow}{=}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z_2^\ell}{\ell!}\right). \qquad \square$$

Insbesondere gilt:

(4) $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$ und $\exp(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

(5) $\exp(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$\exp(x) > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$.

$0 < \exp(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{\leq 0}$. ⌜$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$⌟

(6) $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$.

Bew.: $\exp(y) = \exp(x + (y-x)) = \underbrace{\exp(x)}_{>0} \cdot \underbrace{\exp(\underbrace{y-x}_{>0})}_{>1} > \exp(x)$. $\square$

(7) Formel von de Moivre: $\exp^n(z) = \exp(nz)$.

⌜$\underset{\sim}{n=0}$ ✓, $\underset{\sim}{n \to n+1}$: $\exp^{n+1}(z) = \exp(nz)\exp(z) \underset{(3)}{=} \exp((n+1)z)$ ✓ ⌟

8.5. Reihenrestabschätzung für exp:

$\forall z\in\mathbb{C},\ |z|<n+2:\ \left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| \le \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2-|z|}$.

Bew.:
$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{|z|}{n+2}+\frac{|z|^2}{(n+2)(n+3)}+\dots\right)$$
$$\le \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{|z|}{n+2}+\frac{|z|^2}{(n+2)^2}+\frac{|z|^3}{(n+2)^3}+\dots\right)$$
$$\overset{\text{geom.}\Sigma}{=} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{|z|}{n+2}} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2-|z|}.$$
□

8.6. Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion:

(1) $|\exp(z)-1|<2|z|$ für $|z|<1$.

Bew.: 8.5 für $n=0$: $|\exp(z)-1|\le\frac{2|z|}{2-|z|}<2|z|$. □

(2) $|\exp(z)-1-z|\le\frac{3}{4}|z|^2$ für $|z|\le 1$.

Bew.: 8.5 für $n=1$: $|\exp(z)-1-z|\le\frac{|z|^2}{2}\cdot\frac{3}{3-|z|}\le\frac{3}{4}|z|^2$. □

(3) $|\exp(z)-\exp(z_1)|\le 2|\exp(z_1)|\cdot|z-z_1|$ für $|z-z_1|<1$.

Bew.: $|\exp(z)-\exp(z_1)| = |\exp(z_1+(z-z_1))-\exp(z_1)|$
$$=|\exp(z_1)\cdot\exp(z-z_1)-\exp(z_1)| = |\exp(z_1)\cdot(\exp(z-z_1)-1)|$$
$$\underset{(1)}{\le}|\exp(z_1)|\cdot 2\cdot|z-z_1| = 2|\exp(z_1)|\cdot|z-z_1| \text{ für } |z-z_1|<1.$$
□

(4) Insbesondere: Ist $\varepsilon>0$, so gibt es ein $\delta(\varepsilon):=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2|\exp(z_1)|}\right)$ mit:
$$|z-z_1|<\delta \Rightarrow |\exp(z)-\exp(z_1)|<\varepsilon.$$

(5) $\exp(\bar{z})=\overline{\exp(z)}$.

8.7. Beh.: Für $e:=\exp(1)$ gilt: $2.7<e<2.72$.

Benutze 8.5: $\left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\le\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2-|z|}$ für $|z|<n+2$.

Mit $n=4,\ z=1$:
$$\Big|e-\underbrace{\sum_{k=0}^{4}\frac{z^k}{k!}}_{2.708\overline{3}}\Big|<\frac{1}{5!}\cdot\frac{6}{5}=0.01 \Rightarrow 2.7<e<2.72.$$

8.8. Def.: e heißt **Eulersche Zahl**.

8.9. e ist nicht rational: $e \notin \mathbb{Q}$.

⌜Ann.: $e \in \mathbb{Q}$, d.h. $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < e = \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{q+2}{q+1} \underset{!}{<} \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q},$$

da $q^2 + 2q < q^2 + 2q + 1 \Leftrightarrow q(q+2) < (q+1)^2 \Leftrightarrow \frac{q+2}{(q+1)^2} < \frac{1}{q}$.

Multiplikation mit $q!$: $\quad m := q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \underbrace{p(q-1)!}_{\in \mathbb{N}} < m + \frac{1}{q} \leq m+1$, ↯ $\square$

Bem.: e ist transzendent, d.h. es gibt keine Gleichung
$$e^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^k = 0$$ mit rationalen Koeffizienten a_k.
(1873, Charles Hermite)

8.10. $|\exp(ix)| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bew.: $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix) \cdot \overline{\exp(ix)} = \exp(ix) \cdot \exp(\overline{ix})$
$= \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1$. $\square$

8.11. Bem.: Für jede Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ Konvergieren die Reihen
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$
⌜mit Q.K. 7.22, wie in 7.23.3)⌟

8.12. Def.: Die Funktionen sin und cos : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (Sinus und Cosinus) sind definiert durch $\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ und $\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
Sie heißen Winkelfunktionen.

8.13. Eigenschaften von sin und cos:

(1) sin ist eine ungerade Funktion, d.h. $\sin(-z) = -\sin(z)$,
cos ist eine gerade Funktion, d.h. $\cos(-z) = \cos(z)$.

(2) $\sin(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $\cos(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$.

(3) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$,

Bew.: $i^{2n} = (-1)^n$, $\quad i^{2n+1} = (-1)^n i$.

$$\rightsquigarrow \exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(z) + i\sin(z). \quad \square$$

(4) Für $x\in\mathbb{R}$ gilt: $\cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix))$, $\sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(ix))$.

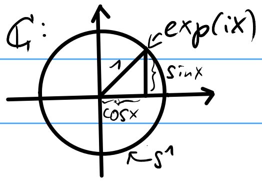
(5) $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz)+\exp(-iz))$, $\sin(z)=\frac{1}{2i}(\exp(iz)-\exp(-iz))$.

⌜wegen $\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z)$, $\exp(iz) = \cos(z)+i\sin(z)$.⌟

(6) $\cos^2(z)+\sin^2(z)=1$.

Bew.: $(\cos(z)-i\sin(z))\cdot(\cos(z)+i\sin(z)) = \exp(-iz)\exp(iz) = 1$. □

$\mathbb{C}$:



Für $x\in\mathbb{R}$ ist $(\cos(x), \sin(x)) \in S^1 := \{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2;\ \xi^2+\eta^2=1\}$.

8.14. **Additionstheoreme:** Für $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ gilt:

$$\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$$
$$\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2)+\cos(z_1)\sin(z_2).$$

Bew. (ausführlich aufgeschrieben):

$$\begin{aligned}
2\cos(z_1+z_2) &= \exp(i(z_1+z_2))+\exp(-i(z_1+z_2)) && \text{wegen } 8.13(5)\\
&= \exp(iz_1)\exp(iz_2)+\exp(-iz_1)\exp(-iz_2)) && \text{wegen } 8.4(3)\\
&= (\cos(z_1)+i\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2)+i\sin(z_2))\\
&\quad + (\cos(z_1)-i\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2)-i\sin(z_2)) && \text{wegen } 8.13(3)\\
&= \cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2) \quad +i\sin(z_1)\cos(z_2)+i\cos(z_1)\sin(z_2)\\
&\quad +\cos(z_1)\cos(z_2)\underbrace{+i^2}_{=-1}\sin(z_1)\sin(z_2) \quad -i\sin(z_1)\cos(z_2)-i\cos(z_1)\sin(z_2)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =0\\
&= 2\cos(z_1)\cos(z_2)-2\sin(z_1)\sin(z_2).
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
2i\sin(z_1+z_2) &= \exp(i(z_1+z_2))-\exp(-i(z_1+z_2)) && \text{wegen } 8.13(5)\\
&= \exp(iz_1)\exp(iz_2)-\exp(-iz_1)\exp(-iz_2)) && \text{wegen } 8.4(3)\\
&= (\cos(z_1)+i\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2)+i\sin(z_2))\\
&\quad -(\cos(z_1)-i\sin(z_1))\cdot(\cos(z_2)-i\sin(z_2)) && \text{wegen } 8.13(3)\\
&= \cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2) \quad +i\sin(z_1)\cos(z_2)+i\cos(z_1)\sin(z_2)\\
&\quad -\cos(z_1)\cos(z_2)\underbrace{-i^2}_{=+1}\sin(z_1)\sin(z_2) \quad +i\sin(z_1)\cos(z_2)+i\cos(z_1)\sin(z_2)\\
&\qquad =0 \qquad\qquad = 2i\sin(z_1)\cos(z_2)+2i\cos(z_1)\sin(z_2).
\end{aligned}$$
□

8.15. **Bem.:** Weitere Eigenschaften von exp/sin/cos erfahren wir später in An 10/An 14.

Vorlesung Analysis I   WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 9: Stetigkeit

Stichworte: Intervalle, Stetigkeit, Folgenkriterium, Stetigkeitssätze, Polynome und rationale Funktionen, Eigenschaften stetiger Funktionen, Zwischenwertsatz, Satz vom Minimum/Maximum [Hoff, §2.1, 3.4.2]

9.1. Einleitung: Wir definieren Intervalle und untersuchen Grundeigenschaften reeller Funktionen. Dies führt uns auf den Stetigkeitsbegriff und deren Eigenschaften, etwa dass stetige Funktionen Intervalle auf Intervalle abbilden – eine Folgerung des ZWS.

9.2 Intervalle sind zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{R}$, d.h. $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: $x, y \in I,\ x < y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R},\ x < z < y:\ z \in I$. ⊛

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ bezeichnen wir

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ "abgeschlossenes IV"

$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$ "offenes IV"

$$\left.\begin{array}{l}]a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\} \\ [a,b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} \end{array}\right\} \text{"halboffene IVe"}$$

als beschränkte IVe, neben diesen bezeichnen wir noch unbeschränkte IVe mit:

$$\text{halboffen}\left\{\begin{array}{l} [a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}, \\ ]-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}, \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l}]a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ x > a\} \\ ]-\infty,a[:= \{x \in \mathbb{R};\ x < a\} \\ ]-\infty,\infty[:= \mathbb{R}. \end{array}\right\} \text{offen}$$

Aufgrund der Axiome von $\mathbb{R}$ haben diese Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Eigenschaft ⊛.

9.3. Bsp.: • reelle ε-Umgebungen sind IVe: $\mathcal{U}_a^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R};\ |x-a| < \varepsilon\} =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

• beschränkte offene IVe sind ε-Umgebungen: $]a,b[=]\frac{a+b}{2} - \varepsilon, \frac{a+b}{2} + \varepsilon[= \mathcal{U}_{(a+b)/2}^\varepsilon$ mit $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

• $]2,10[\cap [7,15[= \{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 10 \wedge 7 \leq x < 15\} = [7,10[$.

9.4. Vereinbarung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine (reellwertige) Funktion.

Typischerweise ist D ein Intervall, muss aber nicht, wie z.B. $f: \overbrace{\mathbb{R} \setminus \{1\}}^{\text{kein IV}} \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x-1}$.

Sei $x_0 \in D$ ein Element des Definitionsbereichs von f, dieses ist also eine reelle Zahl.

Wir wollen untersuchen, ob f nahe x_0 "steigt" oder "fällt", also in einer ε-Umgebung von x_0 "steigt" oder "fällt". Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$.

9.5 **Def.:** Für $T \subseteq D$ nennen wir f (etwa $T = \mathcal{U}^{\varepsilon}_{x_0}$)

- streng isoton in T / streng monoton wachsend in T, falls $\forall x_1, x_2 \in T, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$.
- isoton in T / monoton wachsend in T, falls $\forall x_1, x_2 \in T, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.
- streng antiton in T / streng monoton fallend in T, falls $\forall x_1, x_2 \in T, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$.
- antiton in T / monoton fallend in T, falls $\forall x_1, x_2 \in T, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$.

9.6. Umformulierung: In 9.5 gilt: • f streng isoton in $T \iff \forall x_1, x_2 \in T, x_1 \neq x_2 : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, • f isoton in $T \iff \ldots \geq 0$, • f streng antiton in $T \iff \ldots < 0$, • f antiton in $T \iff \ldots \leq 0$.

Bez.: Den Bruch $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ nennen wir Differenzenquotient.

9.7. **Def.:** • $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt gerade, falls $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$,
und ungerade, falls $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$.

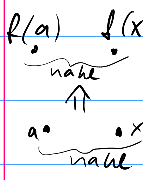
- $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, falls $\forall x \in D : f(x+p) = f(x)$.
- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt durch $\alpha \in \mathbb{R}$ nach $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{smallmatrix} \right\}$ beschränkt, falls $\forall x \in D : f(x) \left\{ \begin{smallmatrix} \leq \\ \geq \end{smallmatrix} \right\} \alpha$.
- f heißt nach $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{smallmatrix} \right\}$ beschränkt, falls $\exists \alpha \in \mathbb{R} :$ f durch α nach $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{oben} \\ \text{unten} \end{smallmatrix} \right\}$ beschränkt;
  und gilt beides, so heißt f beschränkt.

9.8. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{K}$, $f : D \to \mathbb{K}$ sei eine Funktion.

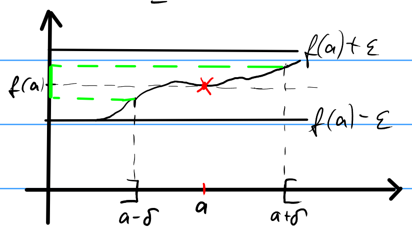
Def.: Die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt stetig in $a \in D$, falls gilt:

$$(*) \quad \boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |x - a| < \delta, \ x \in D \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.}$$

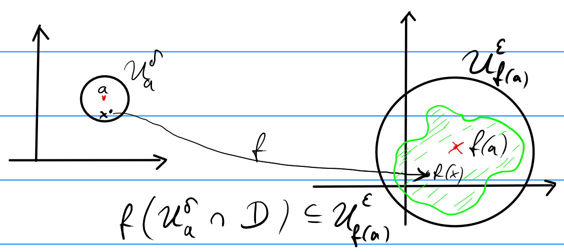
Skizzen:



D = ℝ:



D = ℂ:



$f(\mathcal{U}^{\delta}_{a} \cap D) \subseteq \mathcal{U}^{\varepsilon}_{f(a)}$

(*) besagt, dass die Funktionswerte $f(x)$ für x nahe a beliebig nahe an $f(a)$ "heranrücken".

9.9. $(*) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}^{\delta}_{a} \cap D : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$(*) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}^{\delta}_{a} \cap D : f(x) \in \mathcal{U}^{\varepsilon}_{f(a)}$.

$(*) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f(\mathcal{U}^{\delta}_{a} \cap D) \subseteq \mathcal{U}^{\varepsilon}_{f(a)}$

9.10. **Def.:** f heißt stetig in D, falls f in allen Punkten $a \in D$ stetig ist.

9.11. **Bsp.:**

(1) $f(x) \equiv b \in \mathbb{R} \; \forall x \in D$: f ist stetig in $a \in D$ für alle $a \in D$.

⌜Für $\varepsilon > 0$ ist $\delta(\varepsilon)$ beliebig wählbar.⌟

(2) $a \in D$ sei isolierter Punkt von D, d.h. $\exists \eta > 0 : \mathcal{U}_a^\eta \cap D = \{a\}$.

Dann ist jede Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ stetig in a.

(Für $\varepsilon > 0$ ist $\delta(\varepsilon) = \eta$ zulässig.)

(3) $|\cdot| : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto |x|$ ist stetig.

⌜Für $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ ist $\delta(\varepsilon) := \varepsilon$ zulässig, denn: $\big||x| - |a|\big| \leq |x-a| < \varepsilon$.⌟

(4) $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x$ ist stetig.

⌜Zu $\varepsilon > 0$ ist $\delta(\varepsilon) := \varepsilon$ zulässig.⌟

(5) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = \sqrt[k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist f stetig.

Bew.: Zeige: $0 \leq x \leq y \Rightarrow 0 \leq \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \leq \sqrt[k]{y-x}$:

⌜Sei OE $x < y$, setze $b := \sqrt[k]{y}$, $a := \sqrt[k]{x}$ $\Rightarrow b > a$.

Es ist $b^k = (a + (b-a))^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j \underbrace{(b-a)}_{>0}^{k-j} \geq a^k + (b-a)^k$.

$\Rightarrow y - x = b^k - a^k \geq (b-a)^k = (\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x})^k$

$\Rightarrow \sqrt[k]{y-x} \geq \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{x} \geq 0$.⌟

Somit ist für $\varepsilon > 0$ dann $\delta(\varepsilon) := \varepsilon^k$ zulässig. ⌜$|f(y) - f(x)| \leq \sqrt[k]{y-x} \leq (\varepsilon^k)^k = \varepsilon$⌟ □

9.12. **Monster 1:** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R} = D$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Dann ist f in keinem Punkt $a \in \mathbb{R}$ stetig.

9.13. **Def.:** $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt dicht in $\mathbb{R}$, wenn $\forall x \in \mathbb{R} \; \forall \delta > 0 : A \cap \mathcal{U}_x^\delta \neq \emptyset$,

d.h. jedes $\mathcal{U}_x^\delta$ enthält Werte aus A.

Bsp.: $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ Ü Warum?

9.14 **Bew. von 9.12:**

Sei $a \in \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) $\overset{\mathbb{Q},\, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ dicht in } \mathbb{R}}{\Rightarrow}$ $\forall \delta > 0 \; \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{Q}$) mit $x \in \mathcal{U}_a^\delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(a)| = 1 \Rightarrow$ Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gibt es kein zulässiges $\delta(\varepsilon) > 0$. □

9.15. **Monster 2:** $f: D=\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q(x)}, & x\in\mathbb{Q}, \text{ wobei } x=\frac{p(x)}{q(x)} \text{ mit } \overset{\in\mathbb{Z}}{p(x)}, \overset{\in\mathbb{N}}{q(x)} \text{ teilerfremd,} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

Dann gilt: f ist stetig in allen $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$,
f ist unstetig in allen $a\in\mathbb{Q}$.

Bew.: i): $a\in\mathbb{Q} \Rightarrow f(a)>0$. Aber $\forall\delta>0\ \exists\, x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\mathcal{U}_a^\delta$.
$\Rightarrow |\underbrace{f(x)}_{=0}-f(a)| = |f(a)|$ für $x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap\mathcal{U}_a^\delta$.
$\Rightarrow$ Für $\varepsilon=|f(a)|$ gibt es kein zulässiges $\delta(\varepsilon)$.

ii): $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, also $f(a)=0$. Sei $\varepsilon>0$, wähle $n\in\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n}<\varepsilon$.
Setze $\delta(\varepsilon)=\delta=\min\{|a-\frac{m}{n!}|;\ m\in\mathbb{N}\}>0$.
Sei $|x-a|<\delta \Rightarrow$ 1.) $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$. ✓
2.) $x\in\mathbb{Q}$, $x=\frac{p}{q}$: $x\notin\frac{1}{n!}\cdot\mathbb{N} \Rightarrow q>n$.
⌜Denn: $x=\frac{(q-1)!\,p}{q!}$, wäre $q\leq n$, ließe sich so erweitern, dass im Nenner $n!$ stünde.⌟
Somit: $|f(x)-f(a)|=\frac{1}{q}<\frac{1}{n}<\varepsilon$. □

9.16. **Satz:** Die Funktionen $\mathrm{Re}: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $k: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit $k(z)=\bar{z}$ sind stetig, denn: $|\mathrm{Re}(z_1)-\mathrm{Re}(z_2)|=|\mathrm{Re}(z_1-z_2)|\leq|z_1-z_2|$,
analog für Im, und $|k(z_1)-k(z_2)|=|k(z_1-z_2)|=|\overline{z_1-z_2}|=|z_1-z_2|$.
(Für $\varepsilon>0$ ist $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ zulässig.)

9.17. **Satz:** $\exp: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ist stetig (vgl. Bem. (4) in 8.6.).

9.18. **Folgenkriterium:** Sei $\emptyset\neq D\subseteq\mathbb{K}$. Eine Funktion $f: D\to\mathbb{K}$ ist stetig in $a\in D$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall (z_n)\in\mathcal{F},\ z_n\in D\ \forall n\in\mathbb{N}: \lim_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n)=f(a).$$

Bew. (ausführlich):
„$\Rightarrow$": Sei f stetig in a, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$. Zu zeigen: $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=f(a)$.
Sei $\varepsilon>0 \overset{f\text{ st. in } a}{\Longrightarrow} \exists\,\delta>0: f(\mathcal{U}_a^\delta\cap D)\subseteq\mathcal{U}_{f(a)}^\varepsilon$
$\overset{z_n\to a}{\Longrightarrow} \exists\, n_0=n_0(\delta)\ \forall n\geq n_0: |z_n-a|<\delta$ bzw. $z_n\in\mathcal{U}_a^\delta$.
$\Rightarrow f(z_n)\in\mathcal{U}_{f(a)}^\varepsilon$ f.a. $n\geq n_0$, d.h. $|f(z_n)-f(a)|<\varepsilon$ f.a. $n\geq n_0$.

„$\Leftarrow$": Ann.: Sei f nicht stetig in $a \in D$,
d.h. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 : f(\mathcal{U}_a^\delta \cap D) \not\subseteq \mathcal{U}_{f(a)}^\varepsilon$.
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists z_n \in \mathcal{U}_a^{1/n} : f(z_n) \notin \mathcal{U}_{f(a)}^\varepsilon$,
also: $|f(z_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ und wo $|z_n - a| < \frac{1}{n}$.
Somit ist $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, aber $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(a)$. $\square$

9.19. **Def.:** Seien $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen, $c \in \mathbb{R}$.
Dann setzt man:

$D_{f\pm g} := D_f \cap D_g$, $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$, $\leadsto$ def. $f \pm g$
$D_{cf} := D_f$, $(cf)(x) := c\, f(x)$, $\leadsto$ def. cf
$D_{\frac{1}{g}} := \{x \in D_g ; g(x) \neq 0\}$, $\left(\frac{1}{g}\right)(x) := \frac{1}{g(x)}$, $\leadsto$ def. $\frac{1}{g}$
$D_{\frac{f}{g}} := D_f \cap D_{\frac{1}{g}}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$. $\leadsto$ def. $\frac{f}{g}$

9.20. **Satz:** Es gilt:

1) f stetig in $a \in D_f \Rightarrow cf$ stetig in a.
2) f, g stetig in $a \in D_{f\pm g} \Rightarrow f \pm g$ stetig in a.
3) g stetig in $a \in D_{1/g} \Rightarrow \frac{1}{g}$ stetig in a.
4) f, g stetig in $a \in D_{f/g} \Rightarrow \frac{f}{g}$ stetig in a.

Bew.: Benutze das Folgenkriterium für die Stetigkeit in $a \in D$ und die Eigenschaften von Grenzwerten von Folgen. $\square$

9.21. **Bsp.:** 1) (a_n) reelle Folge, $a_n \geq 0$, $a_n \to a \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[k]{a}$, da $f(x) = \sqrt[k]{x}$ stetig
2) sin, cos stetig.
3) Trivialität: Sei $D_f \supseteq D \ni a$. Dann: f in a stetig $\Rightarrow f_{/D}$ in a stetig.
4) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow f_{/\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig.

9.22. **Def.:** Die Hintereinanderausführung / Verkettung / Komposition zweier Funktionen
$f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subseteq D_g$
ist die Funktion $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$, $g \circ f(x) := g(f(x))$.
Wir bezeichnen so das Einsetzen einer Funktion in eine andere.
Für $g \circ f$ sprich "g nach f": erst f, dann g anwenden. Anschaulich:

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & f(D_f) \subseteq D_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

9.23. Zur Stetigkeit der Komposition / Hintereinanderausführung von Funktionen:
Sei $a \in D_f \xrightarrow{f} D_g \xrightarrow{g} \mathbb{K}$, f in a stetig, g in $f(a)$ stetig.
Dann ist $g \circ f$ in a stetig.

Bew.: $a_n \to a$ in $D_f \underset{f\,\text{st.}}{\Rightarrow} f(a_n) \to f(a)$ in $D_g \underset{g\,\text{st.}}{\Rightarrow} g(f(a_n)) \to g(f(a))$ in $\mathbb{K}$. □

Bsp.: $f(z) = \sqrt[37]{\exp(|\cos(2z^2+16)|)}$ ist stetig

9.24. **Polynomfunktionen:** Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Polynom: $\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, X: Unbestimmte
$\Updownarrow$
Polynomfunktion: $\mathbb{K} \ni z \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \in \mathbb{K}$.

Bezeichnung: $\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ist $\begin{cases} \text{Polynom} \\ \text{Polynomfunktion} \\ \text{Wert der Polynomfunktion an der Stelle } z. \end{cases}$

Polynome sind stetig.

9.25. **Rationale Funktionen:** P, Q seien Polynome, $Q \neq 0$.
$R := \frac{P}{Q}: D_{\frac{P}{Q}} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ heißt rationale Funktion, ist stetig.

9.26. **Zusätzliche Stetigkeitsaussagen über $\mathbb{R}$**

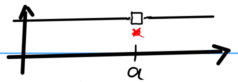
Vor.: $a \in D_f \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, f stetig.

Beh.: 1) $f(a) > \gamma \Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in D_f \cap \mathcal{U}_a^\delta : f(x) > \gamma$.

2) $f(a) < \gamma \Rightarrow \exists \delta > 0 \ \forall x \in D_f \cap \mathcal{U}_a : f(x) < \gamma$.

Bew.: 1): Sei $\varepsilon := f(a) - \gamma > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0: f(a) - f(x) \leq |f(a) - f(x)| < f(a) - \gamma$
für alle $x \in \mathcal{U}_a^\delta \cap D_f$. $\Rightarrow f(x) > \gamma$.

2): Sei $\varepsilon := \gamma - f(a) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0: f(x) - f(a) \leq |f(x) - f(a)| < \gamma - f(a)$
für alle $x \in \mathcal{U}_a^\delta \cap D_f$. $\Rightarrow f(x) < \gamma$. □

9.27. **Bem.:** Die Beh. ist notwendig, aber nicht hinreichend:
Bsp. für f unstetig mit 1) ist 

9.28. **Def.:** f mit 1) heißt oberhalb stetig, f mit 2) heißt unterhalb stetig.

9.29. Zwischenwertsatz (ZWS):

Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, sei $f(a) < z < f(b)$.

Beh.: $\exists\, c \in\,]a,b[$ mit $f(c) = z$.

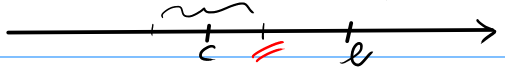
Bew.: Sei $c := \sup\{x \in [a,b];\ f(x) \leq z\}$.

Diese Menge ist n.o. beschränkt und $\neq \emptyset$.

Es gilt: $f(c) \overset{!}{=} z$.

Sonst: a) Falls $f(c) < z$: 9.26(2) $\Rightarrow \exists\, \delta > 0\ \forall x \in [a,b] \cap \mathcal{U}_c^\delta : f(x) < z$

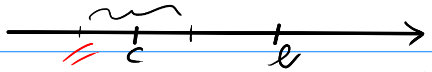
$c \neq b \Rightarrow [c-\delta, c+\delta] \subseteq \{x \in [a,b];\ f(x) \leq z\}$.



↯ zu $c = \sup\{x \in [a,b];\ f(x) \leq z\}$.

b) Falls $f(c) > z$: 9.26(1) $\Rightarrow \exists\, \delta > 0\ \forall x \in [a,b] \cap \mathcal{U}_c^\delta : f(x) > z$

$c \neq b \Rightarrow [c-\delta, c+\delta] \nsubseteq \{x \in [a,b];\ f(x) \leq z\}$.



↯ zu $c = \sup\{x \in [a,b];\ f(x) \leq z\}$. □

9.30. Satz vom Minimum und Maximum:

Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Beh.: $\exists\, t_1, t_2 \in [a,b]\ \forall x \in D_f : \underbrace{f(t_1)}_{\text{Minimum}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(t_2)}_{\text{Maximum}}$

Bew.: (Für t_2, sonst $f \rightsquigarrow -f$):

Sei $s := \sup f([a,b])$, dies existiert (d.h. $s \neq \infty$).

⌜Sonst $\exists\, (x_n) \subseteq [a,b] : f(x_n) > n$, Œ $x_n \to x_0 \in [a,b]$ ⌜Bolzano-Weierstraß⌟
Da f stetig, gilt $f(x_n) \to f(x_0)$, also $(f(x_n))$ beschränkt im ↯ zu $f(x_n) > n$.⌟

Weiter $\exists\, f(x_n) = y_n \subseteq f([a,b])$, $y_n \to s$, Œ $x_n \to x_0 \in [a,b]$.
⌜B.-W.⌟

Beh.: $s \overset{!}{=} f(x_0) = f(t_2)$ Bew.: Zu zeigen: $s \leq f(x_0)$.

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt nun: Falls $f(x_0) < \alpha$,
so ist $f(x_n) < \alpha$ für große n, also $s \leq \alpha$. ☒

Es folgt $s \leq f(x_0)$.

⌜Sonst: $f(x_0) < s \Rightarrow d := s - f(x_0) > 0$, $\alpha := f(x_0) + \frac{d}{2}$.

$\Rightarrow \underbrace{f(x_0) < f(x_0) + \frac{d}{2}}_{\alpha} \overset{☒}{\Rightarrow} s \leq \underbrace{f(x_0) + \frac{d}{2}}_{\alpha} \Rightarrow s \leq f(x_0) + \frac{s}{2} - \frac{f(x_0)}{2}$

$\Rightarrow \frac{s}{2} \leq \frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow s \leq f(x_0)$, ↯ zur Ann.⌟ □

Kürzer so:
Haben:
$y_n \to s$
$\shortparallel$
$f(x_n) \to f(x_0)$,
da $x_n \to x_0$ und
f stetig.
Wegen Eind. des
GW folgt $s = f(x_0)$,
Somit ist
$\forall x \in [a,b] : f(x) \leq s = f(x_0)$
also: $f(x_0)$ ist Max.
von $f \rightsquigarrow$ setze $t_2 := x_0$. ✓

9.31 Folgerung:

In 9.30 ist $f([a,b])$ ein Intervall laut 9.29/9.30.
$\rightsquigarrow$ stetige Bilder von IVen sind IVe!

Vorlesung Analysis I

WiSe '24/'25 hhu
K. Halupczok

An 10: Funktionsgrenzwerte

[Hoff, §3.4.1, §4.8]

Stichworte: Grenzwert einer Funktion, Links-/Rechtsseitiger Limes, gleichmäßige Stetigkeit, Satz über Umkehrfunktionen, Logarithmus

---

10.1. **Einleitung:** Für einen Häufungspunkt a im Definitionsbereich einer Funktion f definieren wir den Funktionsgrenzwert von $f(x)$ für $x \to a$. Mit der zusätzlichen Bedingung $x > a$ ist dies der rechtseitige Limes, für $x < a$ der linksseitige. Bestimmte Divergenz kann entsprechend definiert werden. Weiter führen wir den Logarithmus ein.

10.2. **Def.:** Sei $M \subseteq \mathbb{K} \ni a$. Dann heißt a ein Häufungspunkt (HP) von M, falls $\forall \varepsilon > 0 : \left(\mathcal{U}_a^\varepsilon \setminus \{a\}\right) \cap M \neq \emptyset$.

10.3. **Bsp.:** Sei $M = [0,1[\cup \{2\}$.

$\rightsquigarrow a = 1$ ist HP von M, $a \notin M$ $\qquad \rightsquigarrow a = 1 + 10^{-42}$ kein HP von M, $a \notin M$

$\rightsquigarrow a = \frac{1}{2}$ ist HP von M, $a \in M$ $\qquad \rightsquigarrow a = 2$ kein HP von M, $a \in M$

10.4. **Def.:** Sei $M \subseteq D \subseteq \mathbb{K} \ni b$, $f : D \to \mathbb{K}$, a ein HP von M.

Wir definieren: $\quad f(x) \longrightarrow b \ (\text{bei } M \ni x \to a) \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$$:\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Sprechweise: $f(x)$ konvergiert bei/für $x \to a$ gegen b.

Folgenformulierung: $\quad f(x) \longrightarrow b \ (\text{bei } M \ni x \to a)$

$$\iff \left((x_n) \text{ in } M, \forall x_n \neq a \right) : \left(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b \right)$$

Stetigkeitsformulierung: $\overset{\Longleftarrow}{\underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}}$ $\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in M \setminus a, \\ b, & \text{falls } x = a, \end{cases}$ $\qquad (\rightsquigarrow \text{i.a. } a \notin M)$

ist stetig in a.

10.5. **Def.:** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $M := D \cap \,]a, \infty[$.

rechtsseitiger Limes: $f(a+) := f(a+0) := \lim\limits_{x \to a+} f(x) := \lim\limits_{x \to a\downarrow} f(x) := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \in M}} f(x)$

linksseitiger Limes: $f(a-)$ analog.

Bem.: Falls $M = \emptyset$: $f(x) \to b$ (bei $x \to a$).

10.6. **Bsp.:** 1.) $f(x)=\lfloor x \rfloor$, $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $f(n+)=n$, $f(n-)=n-1$.

2.) Vorzeichenfunktion: $f(x)=\text{sign}(x) := \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ "Signum"

Dann: $\lim\limits_{0<x\to 0} f(x)=1$ und $\lim\limits_{0>x\to 0} f(x)=-1$.

3.) $f(z):=\frac{e^z-1}{z}$, $z\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$.

$\lim\limits_{z\to 0} f(z)=1$. ⌜ $\left|\frac{e^z-1-z}{z}\right| \overset{\substack{8.5\\ n=1}}{\le} \frac{1}{|z|}\cdot\frac{|z|^2}{2}\cdot\frac{3}{3-|z|} \overset{|z|\le 1}{\le} |z|\cdot\frac{3}{4} \xrightarrow{z\to 0} 0.$ ⌟

$\Rightarrow f(z)\to 1.$

4.) $f(z):=\frac{z^n-1}{z-1}$, $z\neq 1$. Dann: $f(z)\xrightarrow{z\to 1} n$.

⌜ $f(z)=\sum_{j=0}^{n-1} z^j \xrightarrow{z\to 1} n\cdot 1=n$ ⌟

Gleichmäßige Stetigkeit

Hatten die ε-δ-Definition für Stetigkeit:

$$\forall\varepsilon>0\ \forall a\in D_f\ \exists\delta>0\ \forall x\in D_f:\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Beh.: δ hängt (unter Umständen) von a ab.

Bsp.: $D_f=\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ ist stetig. Betr. etwa $a=n\in\mathbb{N}$.

Für $\delta:=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2n+1}\right)$ gilt dann $|f(x)-f(n)|=|x^2-n^2|=|x-n|\cdot\overset{<(2n+1)}{|x+n|}<\varepsilon$

für $|x-n|<\delta$, weil $|x+n|=|x-n+2n|\le|x-n|+2n<\delta+2n\le 2n+1$.

Eine besondere Stetigkeit liegt vor, wenn δ nicht von a abhängt wie folgt.
(Dies wird später für das Integrieren von Funktionen eine Rolle spielen.)

10.7. **Def.:** f heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall a,x\in D_f:\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Quantoren vertauscht! Vgl. Bsp. in 1.15.

10.8. **Satz:** Vor.: $-\infty<a<b<\infty$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Beh.: f stetig ⇒ f gleichmäßig stetig.

Bew.: Sonst: $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists a,x\in D_f:\ |x-a|<\delta \wedge |f(x)-f(a)|\ge\varepsilon$.

Wähle $\delta=\frac{1}{n}$: $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ und $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$,

OE $x_n\to x_0\in[a,b] \Rightarrow y_n\to x_0 \Rightarrow \underbrace{|f(x_0)-f(x_0)|}_{=0}\ge\varepsilon$, ↯. □

10.9. **Bestimmte Divergenz bei Funktionen:**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (unten) nicht beschränkt.

Dann def.: $f(x) \longrightarrow b$ (bei $M \ni x \longrightarrow \substack{\infty \\ -\infty}$)

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{R}: \ \substack{x > k \\ x < -k} \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$

⤳ Zurückführung auf Folgen klar, vgl. 6.11

⤳ Zurückführung auf Stetigkeit: Sei $g(x) := \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x > 0, \ \frac{1}{x} \in M, \\ b, & x = 0. \end{cases}$

Dann gilt: $f(x) \to b$ (bei $M \ni x \to a$) $\Longleftrightarrow$ g in 0 stetig.

10.10. 10.4 ist auch äquivalent zu: „ $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}_a^\delta, x \neq a: |f(x) - b| < \varepsilon.$

Dies lässt sich zu Aussagen über die bestimmte Divergenz von $f(x)$ übertragen wie folgt.

Setze für Ästheten: $\mathcal{U}_\infty^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R};\ x > \frac{1}{\varepsilon}\} =]\frac{1}{\varepsilon}, \infty[,$

$\mathcal{U}_{-\infty}^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R};\ x < -\frac{1}{\varepsilon}\} =]-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}[.$

Damit gilt dann:

$f(x) \to \infty$ (bei $M \ni x \to a$) $\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}_a^\delta, x \neq a: f(x) > k$

$f(x) \to -\infty$ (bei $M \ni x \to a$) $\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}_a^\delta, x \neq a: f(x) < k$

$f(x) \to \infty$ (bei $M \ni x \to \infty$) $\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}_\infty^\delta: f(x) > k$

$f(x) \to -\infty$ (bei $M \ni x \to \infty$) $\Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{U}_\infty^\delta: f(x) < k$

↑ entsprechend $-\infty$ für $x \to -\infty$

10.11. **Bsp.:** 1.) $\frac{e^x}{x^n} \xrightarrow{x \to \infty} \infty$. **Bew.:** $\frac{e^x}{x^n} \underset{(x>0)}{\geq} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{x^n} = \frac{x}{(n+1)!} \xrightarrow{x \to \infty} \infty.$

2.) Auf $]0, \infty[$ gilt: $\ln(x) \xrightarrow{x \to \infty} \infty$, $\ln(x) \xrightarrow{x \to 0} -\infty$ (vgl. 10.16/17).

3.) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $a_j, b_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$R(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k} = x^{m-n} \cdot \frac{a_m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j x^{j-m}}{b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k-n}} = x^{m-n} \cdot \frac{a_m + (\to 0)}{b_n + (\to 0)}$$

$$\xrightarrow{x \to \infty} \begin{cases} \frac{a_m}{b_n}, & \text{für } m = n, \\ \operatorname{sign}\left(\frac{a_m}{b_n}\right) \cdot \infty, & \text{für } m > n, \\ 0, & \text{für } m < n. \end{cases}$$

↱ Erinnerung an 9.5

10.12 **Bezeichnung:** Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$.

f heißt $\begin{matrix}\text{isoton}\\ \text{antiton}\end{matrix}$ $:\Leftrightarrow \left(x_1 < x_2 \text{ in } D \Rightarrow f(x_1) \begin{matrix}\leq\\ \geq\end{matrix} f(x_2) \text{ in } \mathbb{R} \right)$

f heißt streng $\begin{matrix}\text{isoton}\\ \text{antiton}\end{matrix}$ $:\Leftrightarrow \left(x_1 < x_2 \text{ in } D \Rightarrow f(x_1) \begin{matrix}<\\ >\end{matrix} f(x_2) \text{ in } \mathbb{R} \right)$

10.13. **Satz über Umkehrfunktionen:**

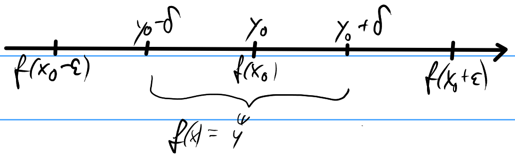
Vor.: $I \subseteq \mathbb{R}$ echtes Intervall (d.h. I enthält ≥ 2 Punkte),
$f: I \to \mathbb{R}$ ~~stetig~~, streng isoton.

Beh.: 1) Es ex. $f^{-1}: f(I) \to I$, streng isoton und stetig.
2) f stetig $\Rightarrow f(I)$ Intervall. (schon aus 9.31 bekannt, folgt mit ZWS)

Bew.: 1): • f streng isoton: $\underset{f^{-1}(f(x))}{\underset{\parallel}{x}} < \underset{f^{-1}(f(y))}{\underset{\parallel}{y}} \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ ⇝ insb.: f injektiv
$\Rightarrow \exists f^{-1}: f(I) \to I$, d.h. f^{-1} streng isoton.

• Sei f stetig in x_0 (nicht Randpunkt von I)
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$. Sei $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$.

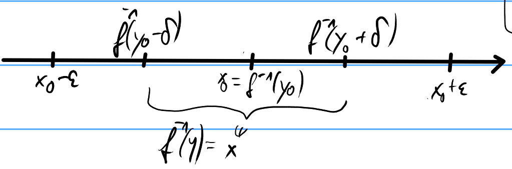
⇝ $\exists \delta > 0$:



⇐ nämlich wähle
$\delta := \min(f(x_0) - f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon) - f(x_0))$
⇝ $\delta > 0$

⇝ $y_0 - \delta < \underset{=y}{\underbrace{f(x)}} < y_0 + \delta$
$\Rightarrow f(x_0-\varepsilon) \leq y \leq f(x_0+\varepsilon)$
$\Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$

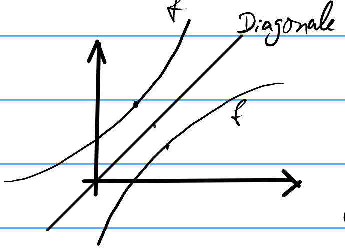
⇝ f^{-1} anwenden:
(f^{-1} streng isoton)



Somit gilt:
$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon \quad \Rightarrow f^{-1} \text{ ist stetig.} \qquad \square$$

Bem.: In 1) kann auf die Vor. "f stetig" verzichtet werden!
Vgl. auch [Heuser, Satz 37.1].

10.14. **Anschauung:**



Spiegelung an der Diagonale $(x,x) \in \mathbb{R}^2$

Graph: $\Gamma_f = \{(x, f(x));\ x \in I\}$
$\Gamma_{f^{-1}} = \{(f^{-1}(y), y);\ y \in f(I)\}$

10.15. **Anwendungsbsp.:**

$\exp: \mathbb{R} \to]0,\infty[$ ist streng isoton, stetig, $\exp(\mathbb{R}) =]0,\infty[$

$x \in \mathbb{R}_{>0}$: $\exp(x) \geq x$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \leq \frac{1}{x}$.

10.16. **Def.:** $\ln := \exp^{-1} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ heißt Logarithmusfunktion.
(schreibe auch log für ln)

10.17. **Eigenschaften der Logarithmusfunktion:**

0) ln ist streng isoton und stetig

1) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

2) $\forall x,y \in]0,\infty[: \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ (Funktionalglg. von ln)

Bew.: $x = e^u, y = e^v \Rightarrow \ln(xy) = \ln(e^{u+v}) = u + v = \ln(x) + \ln(y)$. □

3) $\forall x \in]0,\infty[, n \in \mathbb{N}_{\geq 1} : \ln(x^n) = n \ln(x)$.

Bew.: Induktion: I.A.: $\ln(x^1) = 1 \cdot \ln(x)$. ✓

I.S.: $\ln(x^{n+1}) = \ln(x \cdot x^n) = \ln(x) + \ln(x^n)$

$\overset{\text{I.V.}}{=} \ln(x) + n\ln(x) = (n+1)\ln(x)$. □

4) $\ln(x^{-1}) = -\ln(x)$

Bew.: $0 = \ln(1) = \ln(x \cdot x^{-1}) = \ln(x) + \ln(x^{-1}) \overset{|-\ln(x)}{\Longrightarrow} -\ln(x) = \ln(x^{-1})$. □

5) $\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\ln(x)$

Bew.: $\ln(x) = \ln((\sqrt[n]{x})^n) \overset{3)}{=} n \ln(\sqrt[n]{x}) \overset{|:n}{\Longrightarrow} \frac{1}{n}\ln(x) = \ln(\sqrt[n]{x})$. □

10.18. **Def.** (allgemeine Potenz): Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ (Basis), $x \in \mathbb{R}$ (Exponent).

Dann ist $a^x := \exp(x \ln(a))$, Konsistent mit alter Def. 2.15(4), Bem. in 3.14:

Sei $x = n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a^n_{(\text{neu})} = \exp(n \ln(a)) \overset{3)}{=} \exp(\ln(a^n)) = a^n_{(\text{alt})}$,

$a^{1/n}_{(\text{neu})} = \exp(\frac{1}{n}\ln(a)) \overset{5)}{=} \exp(\ln(a^{1/n})) = a^{1/n}_{(\text{alt})}$.

10.19. Somit gilt: $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$ (alle $x \in \mathbb{R}$, sogar $x \in \mathbb{C}$).

10.20. **Rechenregeln für (allgemeine) Potenzen:** Seien $a, b \in]0,\infty[$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann:

1) $a^x > 0$, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Bew.: $a^x = \exp(x\ln(a)) > 0$, $\ln(a^x) = \ln(\exp(x\ln(a))) = x\ln(a)$. $\square$

2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Bew.: $a^x \cdot a^y = \exp(x\ln(a)) \cdot \exp(y\ln(a)) = e^{(x+y)\ln(a)} = a^{x+y}$. $\square$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$

Bew.: $(e^{x\ln(a)})^y \overset{\uparrow}{=} e^{xy\ln(a)} = a^{xy}$. $\square$

denn $u := e^{x\ln(a)}$ zeigt $u^y = e^{y\ln(u)} = e^{y\ln(e^{x\ln(a)})} = e^{yx\ln(a)\overbrace{\ln(e)}^{=1}}$

4) $a^x b^x = (ab)^x$

Bew.: $e^{x\ln(a)} \cdot e^{x\ln(b)} = e^{x(\ln(a)+\ln(b))} = e^{x\ln(ab)} = (ab)^x$. $\square$

10.21. **Allgemeiner Logarithmus:** Sei $a, x \in]0,\infty[$, $a \neq 1$.

Dann def. $\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$, heißt Logarithmus zur Basis a.

10.22. Haben: $y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$

Denn: $x = a^y \Leftrightarrow x = e^{y\ln(a)} \overset{\ln}{\Leftrightarrow} \ln(x) = y\ln(a) \Leftrightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \log_a(x)$. $\square$

10.23. Umrechnung von Logarithmen zu verschiedenen Basen: Sei $a, b, x \in]0,\infty[$, $a \neq 1 \neq b$.

Dann: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \cdot \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \cdot \log_b(x) = \underbrace{\log_a(b)}_{\text{Umrechnungsfaktor}} \cdot \log_b(x)$

bzw. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$.

10.24. Umrechnung von allgemeinen Potenzen zu verschiedenen Basen:

Sei $a, b \in]0,\infty[$, $a \neq 1 \neq b$, $x \in \mathbb{R}$.

Dann: $a^x = b^{\log_b(a^x)} = b^{x\log_b(a)}$.

10.25. **Beh.:** $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$.

Bew.: Für $|z| \leq 1$ zeigt 8.6(2), dass $\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| = \left|\frac{e^z-1-z}{z}\right| \leq \frac{3}{4}|z| \xrightarrow{z\to 0} 0$,

vgl. 10.6.(3) ⇝ also $\frac{z}{e^z-1} \xrightarrow{z\to 0} 1$, mit $z = \ln(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} \ln(1+0) = 0$ folgt insbesondere

dass $\ln(1+\frac{1}{n})^n = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})-1} = \frac{z_n}{e^{z_n}-1} \xrightarrow[\text{d.h. } n\to\infty]{z_n\to 0} 1$, die Beh. $\square$

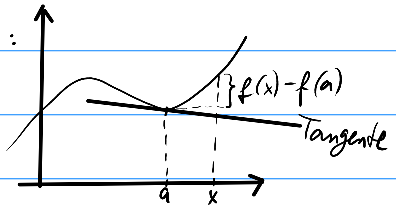
Vorlesung Analysis I
WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 11: Differenzierbarkeit

Stichworte: differenzierbar, Kriterien für Diff'barkeit, Tangenten, Ableitungsregeln, höhere Ableitungen [Hoff, §4.1–§4.3]

11.1. **Einleitung:** Wir führen den Begriff des Differenzierens ein.

Sei $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, Anschauung:



Bezeichnung:
$$\lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\text{Differenzenquotient}}$$
Differentialquotient

11.2. **Def.:** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $a \in D \xrightarrow{f} \mathbb{K}$.

f heißt in a differenzierbar (Kurz: diff'bar),

falls $\exists A \in \mathbb{K} : A = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, genannt: (erste) Ableitung an der Stelle a

Notation dann: $(Df)(a) := f'(a) := \frac{df}{dx}(a) := A$.

11.3. **Def.:** Sei $\emptyset \neq M \subseteq D$.

f heißt in M diff'bar $:\Leftrightarrow \forall c \in M : c$ ist HP von M und f in c diff'bar

f heißt diff'bar $:\Leftrightarrow$ f in D diff'bar

11.4. **Satz:** Äquivalent sind:

1) f in a diff'bar

2) $\exists h : D \to \mathbb{K}$ stetig in a : $f(x) = f(a) + h(x)\cdot(x-a)$

3) $\exists A \in \mathbb{K}$, $r : D \to \mathbb{K}$ stetig in a, $r(a) = 0$:
$$f(x) = f(a) + A\cdot(x-a) + r(x)\cdot(x-a).$$

Zusatz: In 2): $h(a) = f'(a)$, in 3): $A = f'(a)$.

Bew. (per Ringschluss):

(1) ⇒ (2):

$$h(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{für } x \neq a, \\ f'(a) & \text{für } x = a, \end{cases} \quad \text{ist stetig laut (1).}$$

(2) ⇒ (3): $r(x) := h(x) - h(a)$ ist stetig laut (2), $r(a) = 0$,
wo $A = h(a)$ laut (2).

(3) ⇒ (1): $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}(A + r(x)) = A = f'(a)$.

$\square$

11.5. **Bem.:** 1.) Die Tangente an $(a, f(a))$, wobei f in a diff'bar, ist:

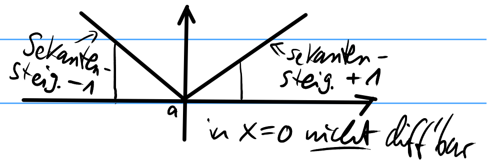
$t_a : \mathbb{K} \ni x \mapsto f(a) + f'(a)\cdot(x-a)$,

Diff'barkeit $\Leftrightarrow \frac{f(x)-t_a(x)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} 0$.

2.) f diff'bar in $a \Rightarrow f$ stetig in a, ist nach 11.4. 2) trivial.

$\not\Leftarrow$ Bsp.:

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ stetig



3.) Trivialität: $a \in M \subseteq D$, a HP von M,

f in a diff'bar $\Rightarrow f_{/M}$ in a diff'bar.

4.) Grundregeln: Sei $a \in D$, $D \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathbb{K}$, a HP von D, f, g in a diff'bar.

Beh.: i) $(f \pm g)$ ist in a diff'bar, $(f\pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$. } → Linearität der Ableitung

ii) $\alpha \in \mathbb{K} \leadsto (\alpha f)$ in a diff'bar, $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$.

iii) $(f \cdot g)$ diff'bar in a, $(f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)\cdot g'(a)$

(Produktregel).

Bew.: Es sei $f(x) = f(a) + h(x)\cdot(x-a)$, $g(x) = g(a) + k(x)\cdot(x-a)$.

i): $(f\pm g)(x) = f(a) \pm g(a) + (h(x) \pm k(x))\cdot(x-a)$ nach (2) diff'bar,

$(f\pm g)'(a) = h(a) \pm k(a) = f'(a) \pm g'(a)$ nach Zusatz.

ii): $(\alpha f)(x) = \alpha f(a) + \alpha h(a)\cdot(x-a)$ nach (2) diff'bar,

$(\alpha f)'(a) = \alpha h(a) = \alpha f'(a)$ nach Zusatz.

iii): $(f\cdot g)(x) = f(a)g(x) + g(x)h(x)(x-a)$

$= f(a)g(a) + (f(a)k(x) + g(x)h(x))\cdot(x-a)$ nach (2) diff'bar,

$(f\cdot g)'(a) = f(a)k(a) + g(a)h(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$ nach Zusatz. $\square$

11.6. Beispiele:

(1) $b \in \mathbb{K}$, $f := b$. Dann ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{b-b}{x-a} = \frac{0}{\neq 0} = 0$.

(2) $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$. Dann ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. (auch $n \in \mathbb{Z}$, vgl. 11.8.2))

⌜Induktion: $n=1$: $\frac{x-a}{x-a} = 1 \Rightarrow f'(x) = 1$ ✓

$n \rightsquigarrow n+1$: $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot n x^{n-1}$

$= x^n(1+n) = (n+1)\, x^{(n+1)-1}$. ✓ □⌟

(3) $f(x) = e^x \Rightarrow f$ diff'bar, $f'(x) = e^x$.

Bew.: $\frac{e^{a+h}-e^a}{h} = e^a \cdot \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow{h \to 0} e^a \cdot 1 = e^a$ (laut 10.6.(3)) □

(4) $\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu\right)' = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \nu x^{\nu-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu x^{\nu-1}$.

(5) Sei $x \in [0, \infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Dann ist $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, $a > 0$, nicht diff'bar in $a = 0$.

Bew.: $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow{x \to a} \frac{1}{2\sqrt{a}}$, $a \neq 0$. □

⌜Bem.: $\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2} a^{-1/2} = (x^{\frac{1}{2}})'|_{x=a}$⌟

11.7. Quotientenregel:

Vor.: $a \in D \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{K}$, a HP von D, $g(a) \neq 0$, f, g in a diff'bar.

Beh.: $\frac{f}{g}$ in a diff'bar und $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ in a. Merkregel: $\frac{NAZ - ZAN}{N^2}$

Anmerkung: g diff'bar in $a \Rightarrow g$ stetig in $a \overset{g(a)\neq 0}{\Rightarrow} g$ ohne Nst. nahe $a \Rightarrow a$ HP von $D_{f/g}$.

Bew.: Sei $x \in D_{f/g} \setminus \{a\}$. Dann ist

$$\frac{(f/g)(x) - (f/g)(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \left(\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\downarrow\, x \to a} \cdot g(a) - \underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\downarrow\, x \to a} \cdot f(a) \right)$$

$$\xrightarrow{x \to a} \frac{1}{(g(a))^2} \cdot \left(f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a) \right).$$

11.8. Bsp.: 1.) $f = 1$: $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-1 \cdot g'}{g^2} = -\frac{g'}{g^2}$.

2.) $h(x) = \frac{1}{x^n}$, $x \in \mathbb{K}^*$. Dann:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1} = (x^{-n})'.$$

3.) Alle rationalen Funktionen sind diff'bar.

11.9. **Kettenregel:**

Vor.: $a \in D \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{K}$ (mit $g \circ f$ von D nach $\mathbb{K}$), a HP von D, $b := f(a)$, f in a und g in b diff'bar.

Beh.: $g \circ f$ in a diff'bar und $(g\circ f)'(a) = \underbrace{g'(f(a))}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{f'(a)}_{\text{innere Abl.}}$.

Bew.: b ist HP von E, und es gilt:

$f(x) = f(a) + h(x)\cdot(x-a)$, $g(y) = g(b) + k(y)\cdot(y-b)$, h, k stetig.

Dann ist $(g\circ f)(x) = g(b) + k(f(x))\cdot(f(x)-b) = g(f(a)) + \underbrace{k(f(x))\cdot h(x)}_{\text{stetig in } a} \cdot \underbrace{(x-a)}_{\text{diff'bar}}$.

$$\Rightarrow (g\circ f)'(a) = k(\overset{=b}{\widetilde{f(a)}})\, h(a) = g'(f(a))\cdot f'(a). \qquad \square$$

11.10. 1. **Bsp.:** cos diff'bar und $\cos' = -\sin$, sin diff'bar und $\sin' = \cos$

Bew.: $\cos'(z) = \left(\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})'\right) = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{-iz} - e^{iz}) = -\sin(z)$,

$\sin'(z) = -\cos'(z + \frac{\pi}{2}) = \sin(z+\frac{\pi}{2})\cdot 1 = \cos(z)$. $\square$

2. **Bsp.:** $a > 0 \rightsquigarrow (a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = \underbrace{e^{x\ln(a)}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{\ln(a)}_{\text{innere}} = a^x \underbrace{\ln(a)}_{=1 \Leftrightarrow a=e}$.

$\rightsquigarrow e^x$ ist die einzige Exponentialfkt. $\neq 0$, deren Abl. mit sich selbst übereinstimmt.

11.11. **Rechtsseitige / Linksseitige Diff'barkeit in a:**

Def.: Sei $a \in \underset{\overset{\cap}{\mathbb{R}}}{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, a HP in $D \cap [a,\infty[$, $f|_{D\cap[a,\infty[}$ sei in a diff'bar.

Dann heißt $f'_+(a) := (f|_{D\cap[a,\infty[})'(a)$ die rechtsseitige Ableitung von f in a,

analog $f'_-(a)$ die linksseitige Ableitung von f in a.

Bem.: f links- und rechtsseitig diff'bar in $a \Rightarrow f$ diff'bar in a.

11.12. **Höhere Ableitungen:** Sei $\mathbb{K} \supseteq D \ni a$, $D \xrightarrow{f} \mathbb{K}$.

Setzen $f^{(0)} := f$, $f^{(n+1)}(a) := (f^{(n)})'(a)$, falls möglich.

Nennen $f^{(n)}(a)$ die n-te Ableitung von f in a,

und f heißt n-mal(ig) differenzierbar in a, falls $f^{(n)}(a)$ ex.

Bezeichnung: $\frac{d^n}{dx^n} f(a) := D^n f(a) := f^{(n)}(a)$,

speziell: $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$.

11.13. **Def.:** f beliebig oft diff'bar $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 \; \exists f^{(n)}$.

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 12: Reelle Differenzierbarkeit

Stichworte: Umkehrfunktionen ableiten, lokales Min/Max/Extremum, Satz von Rolle, verallgemeinerter MWS, Monotoniekriterien, Satz von Darboux, Regel(n) von de l'Hôpital [Hoff, §4.4, §4.8, §4.11, §6.3]

12.1. Einleitung: Wir zeigen einen Satz zur Ableitung von reellen Umkehrfunktionen. Die Zusammenhänge zwischen Extremwerte/Monotonie und Ableitung(svorzeichen) erschließen sich. Es folgt der Satz von Rolle, der Mittelwertsatz, und ein Satz von Darboux. Zuletzt behandeln wir die Regel(n) von de l'Hôpital.

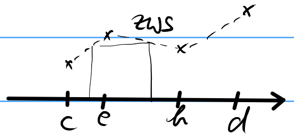
12.2. Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen:

Vor.: $a \in i \subseteq \mathbb{R}$, i echtes Intervall, $f: i \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, f in a diff'bar, $f'(a) \neq 0$.

Beh.: f^{-1} in $b := f(a)$ diff'bar, $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Bew.: • $f(i)$ ist IV. ⌜Es ist f streng monoton, da f auf $[c,d] \subseteq i$ streng monoton:

Sei OE $f(c) < f(d)$. Für $e, h \in [c,d]$ mit $e < h$ gilt nicht $f(h) < f(e)$, sonst ↯ nach ZWS gegen Injektivität.⌟



$f^{-1}: j \to \mathbb{R}$

• Sei $j := f(i)$, d.h. b ist HP von j. Dann gilt:

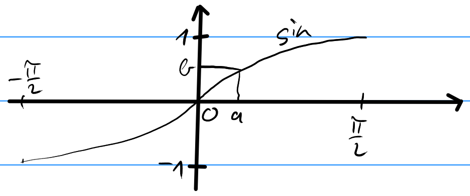
$b \neq \underset{\overset{\cap}{j}}{y_n} \longrightarrow b$, $x_n := f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(b) = a$. ⌜$f^{-1}$ stetig laut 10.13⌟

Dann: $\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \longrightarrow \frac{1}{f'(a)}$. □

12.3. Bsp.: $\ln: b \in]0,\infty[\xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$ ist diff'bar, $\ln'(b) = \frac{1}{b}$.

Bew.: $b = e^a \Rightarrow \ln'(e^a) = \frac{1}{(e^a)'} = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{b}$. □

12.4. **Bsp.:** $\sin\restriction_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ streng isoton, und wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ ist $\sin\restriction_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ streng isoton.

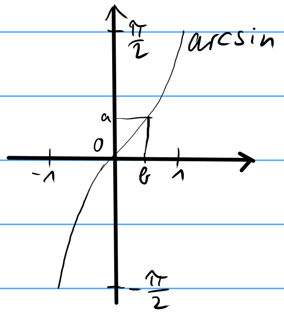


Beh.

$\sin: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, ist bijektiv.

Also: $\exists\ \sin^{-1} =: \arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

streng isoton, stetig, bijektiv.



$\arcsin'(b) = ?$

Für $b \in [-1,1]$ $\exists\ a \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ mit $\sin(a) = b$.

Dann ist: $\sin'(a) = \cos(a) \in [0,1]$,

also $\cos(a) \underset{=}{=} +\sqrt{1-\sin^2(a)}$ $\Rightarrow$ $\arcsin'(b) = \frac{1}{\sin'(a)} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$.

Analog gilt: $[0,\pi] \underset{\arccos}{\overset{\cos}{\rightleftarrows}} [-1,1]$, $\arccos'(b) \underset{=}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$.

↙schon in 10.25 gezeigt

12.5. **Satz** über e: **Beh.:** $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, allgemein: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.

Bew.: $x = 0 \Rightarrow 1 = 1$ ✓. Sei also OE $x \neq 0$, sei OE $1+\frac{x}{n} > 0$.

Dann: $\frac{\ln(1+\frac{x}{n}) - \ln(1)}{\frac{x}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln'(1) = 1$,

also: $n\ln(1+\frac{x}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} x$, d.h. $e^{\ln(1+\frac{x}{n})^n} \xrightarrow{x\to\infty} e^x$

$\Rightarrow (1+\frac{x}{n})^n \xrightarrow{n\to\infty} e^x$.

□

12.6. **Bezeichnung:** f wächst in a $:\Leftrightarrow \exists\,\delta > 0\ \forall x \in D \cap \mathcal{U}_a^\delta : x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$
und $x > a \Rightarrow f(x) > f(a)$.

Analog: f fällt in a.

12.7. **Def. von Extremstellen:**

- f hat in a ein lokales (relatives) Maximum $:\Leftrightarrow \exists\,\delta > 0\ \forall x \in D \cap \mathcal{U}_a^\delta : f(x) \leq f(a)$.

  Analog: f hat in a ein lokales (relatives) Minimum

- f hat in a ein lokales Extremum $:\Leftrightarrow$ f hat in a ein lokales Min. oder lokales Max.

Entsprechend: globales (absolutes) Maximum, Minimum, Extremum ⌜ohne δ, $\mathcal{U}_a^\delta$⌟

12.8. **Bsp.:** $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$ hat ein globales Maximum in x, falls $x \in \mathbb{Q}$,
hat ein globales Minimum in x, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12.9. Wachstumskriterium:

Vor.: a sei HP von D, f in a diff'bar, $f'(a) > 0$. $\ulcorner f'(a) < 0 \lrcorner$

Beh.: f wächst $\ulcorner$fällt$\lrcorner$ in a.

Bew.: Sei Œ $f'(a) > 0$. Dann $\exists\, h$ in a stetig mit

$$f(x) - f(a) = \underbrace{h(x)}_{>0} \cdot (x-a).$$

$\ulcorner h(a) = f'(a) > 0 \Rightarrow$ Œ $h > 0 \lrcorner$ vgl. 9.26

Vergleich beider Seiten ergibt die Beh. ☐

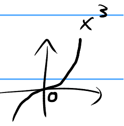
Bem.: Der Schluss, dass unter der Vor. folgen sollte, dass f monoton auf einem IV $\ni a$ sei, ist nicht korrekt! Vgl. Bsp. in Ü. Für Monotonie vgl. 12.15.

12.10. Notwendiges Kriterium für lokale Extrema:

Vor.: $\exists\, \delta > 0 : \mathcal{U}_a^\delta \subseteq D$ $\ulcorner$d.h. a ist ein innerer Punkt von $D\lrcorner$, $f : D \to \mathbb{R}$,
f in a diff'bar, f hat in a lokales Extremum.

Beh.: $f'(a) = 0$. **Bew.:** Sonst Œ $f'(a) > 0$, d.h. ↯ zu 12.9. ☐

Anmerkungen:
- Die Vor. "innerer Punkt" ist nicht ersatzlos streichbar:
  Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, dann ist $f'(1) = 1 = f'(0)$.
- Die Umkehrung von 12.10. gilt nicht! **Bsp.:** $f(x) = x^3$, $a = 0$, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$,



$f(x) = x^3$ wächst in 0

12.11. Satz von Rolle:

Vor.: $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f{\restriction}_{]a,b[}$ diff'bar, $f(a) = f(b)$.

Beh.: $\exists\, \xi \in\,]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz vom Min./Max.

Bew.: $\exists\, t_1, t_2 \in [a,b]\ \forall x \in [a,b] : f(t_1) \leq f(x) \leq f(t_2)$ nach Satz 9.30
- Falls $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$, so ist f konstant und die Beh. trivial.
- Sonst Œ $t_1 \notin \{a, b\}$, aus 12.10. folgt $f'(t_1) = 0$,
  und mit $\xi := t_1$ die Beh. ☐

12.12 **Verallgemeinerter Mittelwertsatz (VMWS):**

Vor: $a<b$, $[a,b] \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$ stetig, in $]a,b[$ diff'bar, $g'|_{]a,b[}$ ohne Nst.

Beh: $\exists\, \xi \in]a,b[:$ $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Bew: $g(b) \neq g(a)$, sonst ↯ zum Satz von Rolle.

Sei $h := (f-f(a)) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g-g(a))$.

h ist stetig und diff'bar, $h(a)=0=h(b)$

$\underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists\, \xi \in]a,b[: h'(\xi)=0 \Rightarrow$ Beh. □

12.13 **Spezialfall:** $g=id$ gibt den **Mittelwertsatz (MWS):**

Vor.: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, in $]a,b[$ diff'bar.

Beh.: $\exists\, \xi \in]a,b[: f(b)-f(a) = f'(\xi)\cdot(b-a)$.

12.14 Kor.: Vor. wie in 12.13 und $\exists A,B\in\mathbb{R}$ mit $A \le f' \le B$ auf $]a,b[$.

($f \le g :\Leftrightarrow \forall x\in D: f(x)\le g(x)$ für $D \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$.)

Beh: $\forall a \le x_1 \le x_2 \le b : A(x_2-x_1) \le f(x_2)-f(x_1) \le B(x_2-x_1)$.

Bew.: trivial mit 12.13. □

Speziell: $A=B=0$ und $f'=0$ auf $]a,b[\Rightarrow f$ konstant auf $]a,b[$

12.15 Kor. (Monotoniekriterium): Vor. wie in 12.13.

Beh.: (a) f isoton $\Leftrightarrow f'|_{]a,b[} \ge 0$, (a') f antiton $\Leftrightarrow f'|_{]a,b[} \le 0$,

(b) f streng isoton $\Leftarrow f'|_{]a,b[} > 0$ (überall)

(b') f streng antiton $\Leftarrow f'|_{]a,b[} < 0$ (überall)

Bew.: (a): Sei $a \le \alpha < \beta \le b$, dann 12.13 ⇝ $\exists\, \xi$ mit $\underbrace{f(\beta)-f(\alpha)}_{\overset{?}{\ge}0 \;\Leftarrow} = \underbrace{f'(\xi)}_{\ge 0}\cdot\underbrace{(\beta-\alpha)}_{>0}$

„⇐": $\beta-\alpha>0 \Rightarrow f(\beta)-f(\alpha)\ge 0 \Rightarrow f$ isoton.

„⇒": Nach Vor.: Differenzenquotient stets $\ge 0 \Rightarrow$ Differentialquotient stets ≥ 0

(a'): analog, ebenso (b), (b') mit „⇐". □

Bem.: In (b), (b') gilt „⇒" nicht!

Bsp.: $f(x)=x^3$, $f'(0)=0$ obwohl f streng isoton.

12.16. **Satz von Darboux:**

<u>Vor.:</u> $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diff'bar, $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $f'(a) < \gamma < f'(b)$. analog: $[f'(a) > \gamma > f'(b)]$

<u>Beh.:</u> $\exists\, \xi \in\,]a,b[$ mit $f'(\xi) = \gamma$.

<u>Bew.:</u> [betr. $-f$ statt f für ">"-Variante]

Sei OE $f'(a) < \gamma < f'(b)$. Dann ist $h(x) := f(x) - \gamma x$ diff'bar,

$h'(a) = f'(a) - \gamma < 0$ und $h'(b) = f'(b) - \gamma > 0$.

Es genügt zu zeigen: h' hat Nullstelle ξ in $]a,b[$.

Es ist: $h'(a) < 0 \Rightarrow h$ fällt in a,

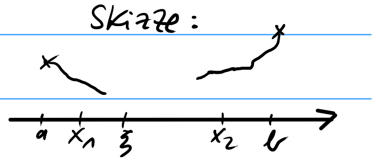
$h'(b) > 0 \Rightarrow h$ wächst in b,

d.h. $\exists\, x_1, x_2$ mit $h(a) > h(x_1)$ und $h(x_2) < h(b)$.

Also $\exists\, \xi \in [a,b]$ mit $h(\xi) \leq h(x)$ auf $[a,b]$. ⌜Satz vom Minimum⌟

Daraus folgt $h'(\xi) = 0$ mit $\xi \in\,]a,b[$. □

Skizze:



<u>Bem.:</u> • f' stetig in 12.16 $\Rightarrow$ Beh. folgt aus ZWS für f'

• f' stetig in 12.9 $\Rightarrow f\restriction\,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ streng isoton für ein $\varepsilon > 0$, falls $f'(a) > 0$ ⌜wegen 9.26⌟

• <u>Def.:</u> f heißt stetig differenzierbar, falls f diff'bar und f' stetig

12.17. **Die Regeln von de l'Hôpital:**

"$\frac{0}{0}$" bei $x \to a+$

(1) <u>Vor.:</u> $a < b \in \mathbb{R}$, $]a,b[\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$, f,g diff'bar,

$f(a+) = 0 = g(a+)$, $g'\restriction\,]a,b[$ ohne Nullstelle, $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \to a+} L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

<u>Beh.:</u> $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to a+} L$. ⌜Analoges gilt für links- und beidseitige Limiten.⌟ $x \to a-$ $x \to a$

<u>Bew.:</u> Sei $\tilde{f} : [a,b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{f} = f$ auf $]a,b[$, $\tilde{f}(a) := 0$,

$\tilde{g} : [a,b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{g} = g$ auf $]a,b[$, $\tilde{g}(a) := 0$, $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ sind stetig.

Für $x \in\,]a,b[$ zeigt der VMWS 12.12: $\exists\, \xi_x \in\,]a,x[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(\xi_x)}{\tilde{g}'(\xi_x)} \xrightarrow{x \to a+} L, \text{ denn } x \to a+ \Rightarrow \xi_x \to a+. \quad \square$$

"$\frac{0}{0}$" bei $x \to \infty$

(2) <u>Vor.:</u> $c \in \mathbb{R}$, $]c,\infty[\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$, f,g diff'bar,

$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0 \xleftarrow{x\to\infty} g(x)$, $g'\restriction\,]c,\infty[$ ohne Nullstelle, $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \to \infty} L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

<u>Beh.:</u> $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to \infty} L$. ⌜Analoges gilt für $x \to -\infty$.⌟

<u>Bew.:</u> Sei OE $c > 0$, $\tilde{f} :]0, \frac{1}{c}[\ni x \mapsto f(\frac{1}{x})$, $\tilde{g} :]0, \frac{1}{c}[\ni x \mapsto g(\frac{1}{x})$.

Dann ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$ und $\frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} = \frac{f'(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2})} = \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})}$, wende Regel (1) an.

□

12.18 **Bsp.:** • $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)=0.$

Denn: $0 \neq x \in \,]-\pi,\pi[$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} \overset{\text{nach } 12.17(1)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

$$\underset{\text{nach } 12.17(1)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{0}{1+1-0}=0.$$

• $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-2.$

Denn: $x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}$, laben $\frac{\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-x^2\cdot\frac{2}{(x-1)(x+1)}$

$$=\frac{-2}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{-2}{(1-0)(1+0)} = -2.$$

12.19. **Bem.:** Die Regeln (1) und (2) ermöglichen die Auswertung von Ausdrücken der Form "$\frac{0}{0}$".
Auch Ausdrücke der Form "$0\cdot\infty$" möglich wegen $\overset{\nearrow 0}{f}\cdot\overset{\nearrow\infty}{g}=\frac{f^{\to 0}}{\frac{1}{g}\to 0}$
und ebenso der Form "$\infty-\infty$" wegen $\underset{\infty}{f}-\underset{\infty}{g}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\to 0}{\frac{1}{gf}\to 0}$

12.20. **Bem.:** • Nicht immer sind die Regeln von de l'Hopital praktikabel. Für $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$ käme man bei $\lim\limits_{x\to 0+}x^\alpha\ln(x)$ auf $\frac{x^\alpha}{(\ln(x))^{-1}} \rightsquigarrow \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{-(\ln(x))^{-2}\cdot\frac{1}{x}}$, komplizierter als vorher!

• Die Methode der Taylorentwicklung von Funktionen, s. späteres Kapitel, ist meist leichter als de l'Hôpital.

12.21. Es gilt noch die Regel

"$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" bei $x\to b$

(3) **Vor.:** $a\in\mathbb{R}$, $a<b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $]a,b[\,\xrightarrow[g]{f}\mathbb{R}$ diff'bar,
$g'\restriction]a,b[$ ohne Nullstelle, $g(x)\to\pm\infty$ für $x\to b$,
$\frac{f'(x)}{g'(x)}\xrightarrow{x\to b}L\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Beh.: $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow{x\to b}L$.

⌜Analog für rechts- und beidseitige Limiten⌟

Bew.: Zitieren [Heuser, Satz 50.1]. □

12.22. **Bem.:** Auf die Voraussetzung "$g'\restriction]a,b[$ ohne Nullstelle" kann nicht verzichtet werden, s. [Heuser, Aufgabe 11 zu Kapitel 50, "Eine Warnung von Otto Stolz"⌟

An 13
– 1 –

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 13: Extremwertsuche, Konvexität

Stichworte: hinreichende Bedingungen für lokale Extrema und Vorzeichen der ersten und zweiten Ableitung, Konvexität und Isotonie der Ableitung, Jensensche Ungleichung [Hoff, §4.11.1/2]

13.1. Einleitung: Wir besprechen Anwendungen der zweiten Ableitung: das sind hinreichende Kriterien zur Extremwertsuche bei reellen Funktionen sowie ein Kriterium zur Überprüfung der Konvexität / Konkavität einer reellen Funktion.

13.2. Situation zur Extremwertsuche:

Sei $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$, $a < \gamma < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Kennen aus 12.10. ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema:

Falls f in γ diff'bar, in γ lokales Extremum $\Rightarrow f'(\gamma) = 0$.

$\rightsquigarrow$ Falls f in γ diff'bar, so sind lokale Extremwertkandidaten: a, b, Nullstellen von f'.

13.3. Satz (hinreichende Kriterien für lokale Extrema):

(1) Vor.: $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ diff'bar, in γ zweimal diff'bar, $f'(\gamma) = 0$, $f''(\gamma) < 0$.

Beh.: f hat in γ lokales Maximum.

(2) Vor.: $f :]a,b[\setminus \{\gamma\} \to \mathbb{R}$ diff'bar, $f'_{\restriction]a,\gamma[} \geq 0$, $f'_{\restriction]\gamma,b[} \leq 0$.

Beh.: f hat in γ lokales Maximum.

analog: Minimum $\Leftrightarrow f''(\gamma) > 0$ in (1)

Bew.: Zu (2): $f_{\restriction]a,\gamma]}$ isoton, $f_{\restriction [\gamma,b[}$ antiton

$\Rightarrow f$ hat in γ lokales Maximum.

Zu (1): $f''(\gamma) < 0 \Rightarrow f'$ fällt in γ

$\Rightarrow \exists \delta, \varepsilon > 0 : \; x \in [\gamma - \delta, \gamma], \; y \in [\gamma, \gamma + \delta]$

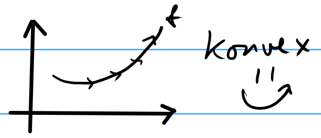
mit $f'(x) \geq f'(\gamma) = 0 \geq f'(y)$.

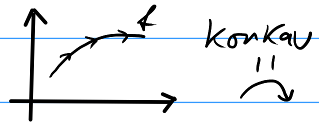
Aus (2) folgt die Beh. □

Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9(x-1)^2 \rightsquigarrow f'(x) = 18(x-1)$, $f''(x) = 18 > 0 \Rightarrow \exists$ lok. Min. bei $x = 1$

Bsp.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9(x-1)^4$, $f'(x) = 36(x-1)^3 \rightsquigarrow f'_{\restriction]-10,1[} \leq 0$, $f'_{\restriction]1,10[} \geq 0 \Rightarrow$ "

13.4. Wenn eine stetige Funktion eine "Linkskurve" macht, sprechen wir von einer konvexen Funktion, bei einer "Rechtskurve" von einer konkaven Funktion.



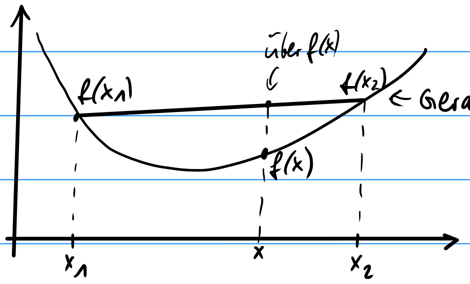


Diese Eigenschaft bezieht sich auf ein Intervall im Definitionsbereich, die Funktion muss nicht stetig sein.
Es wird eine geometrische Eigenschaft beschrieben, anschaulich die "Krümmung".

13.5. Sei $I \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ echtes IV, $f: D \to \mathbb{R}$.

Def.:
- f heißt konvex auf I $:\Leftrightarrow \forall x_1 < x_2$ in I, $\lambda \in [0,1]$:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
- f heißt konkav auf I $:\Leftrightarrow \forall x_1 < x_2$ in I, $\lambda \in [0,1]$:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
- f heißt streng konvex auf I $:\Leftrightarrow \forall x_1 < x_2$ in I, $\lambda \in [0,1]$:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
- f heißt streng konkav auf I $:\Leftrightarrow \forall x_1 < x_2$ in I, $\lambda \in [0,1]$:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$
- $(a, f(a))$ heißt Wendepunkt, falls $\exists x_1, x_2 : a \in [x_1, x_2] \subseteq I$ und f streng $\begin{Bmatrix}\text{konvex}\\\text{konkav}\end{Bmatrix}$ auf $[x_1, a]$ und f streng $\begin{Bmatrix}\text{konkav}\\\text{konvex}\end{Bmatrix}$ auf $[a, x_2]$.

Skizze:



$\leftarrow$ Geradengleichung: $G(\lambda) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix}}_{\text{Aufpunkt}} + \lambda \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ f(x_1) - f(x_2) \end{pmatrix}}^{\text{Richtungsvektor}} ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

in Parameterform

Parameter

$\leadsto G(0) = \begin{pmatrix} x_2 \\ f(x_2) \end{pmatrix}, \; G(1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}$

Sei $x \in [x_1, x_2]$.

λ parametrisiert "Zwischenstelle" x zwischen x_1 und x_2

Dann : $\exists \lambda \in [0,1]$ mit $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = x \in [x_1, x_2]$.

$\hookrightarrow$ x liegt zwischen $x_1 = 1 \cdot x_1 + (1-1) x_2$ und $x_2 = 0 \cdot x_1 + (1-0) \cdot x_2$ genau für $\lambda \in [0,1]$

Für die "Linkskurve", d.h. Konvexität, liegen all die Funktionswerte unterhalb der jeweiligen y-Komponente der Verbindungsgeraden G für das jeweilige λ.
Dies wird mit der Ungleichung in der Definition ausgedrückt.

13.6. Haben: f (streng) konvex $\Leftrightarrow -f$ (streng) konkav.

13.7. **Satz:** **Vor.:** $f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar. **Beh.:** f konvex $\Leftrightarrow f'$ isoton.

Bew.: Sei $x_1 < x_2 \in I$, $\lambda \in [0,1]$.

Es ist $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \Rightarrow \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, $1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$,

d.h. mit $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x) = f(x)$

ist: $f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ $(*)$

$\Leftrightarrow \lambda (f(x) - f(x_1)) \leq (1-\lambda)(f(x_2) - f(x))$

$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$.

Zu „$\Rightarrow$": $\lim\limits_{x \to x_1+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) \leq \lim\limits_{x \to x_1+} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

und $\lim\limits_{x \to x_2-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(x_2) \geq \lim\limits_{x \to x_2-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$,

also: $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, d.h. f' ist isoton.

Zu „$\Leftarrow$": MWS 12.13 $\leadsto \exists \xi_1 \in]x_1, x[\ \exists \xi_2 \in]x, x_2[$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \overset{\text{Vor. } f' \text{ isoton}}{\leq} f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

dies ist $\Leftrightarrow (*)$. $\square$

13.8. **Korollar:** **Vor.:** $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal diff'bar. **Beh.:** f konvex $\Leftrightarrow f'' \geq 0$.

Bew.: Klar mit 13.7 und 12.15 (a). $\square$

verallg. der "Konvexität" definierenden Ungl. auf n Stellen

13.9. Jensensche Ungleichung: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex, $n \geq 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

Dann gilt: $\forall x_1, \dots, x_n \in [a,b]$: $f\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$

Bew. (Vollst. Ind.): $n = 2$: $\lambda_2 = 1 - \lambda_1 \leadsto f(\lambda_1 x_1 + \underbrace{\lambda_2}_{1-\lambda_1} x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \underbrace{(1-\lambda_1)}_{\lambda_2} f(x_2)$ laut Vor. ✓

$n \leadsto n+1$: $f\left(\sum\limits_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j\right)$

$$= f\Big((1-\lambda_{n+1}) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{n+1}} x_j}_{= x_1'} + \lambda_{n+1} \underbrace{x_{n+1}}_{= x_2'}\Big) \overset{\text{Vor.}}{\leq} (1-\lambda_{n+1}) f\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{n+1}} x_j\Big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\underset{\text{Ind. Vor.,}}{\leq} (1-\lambda_{n+1}) \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{n+1}} f(x_j) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f(x_j).$$

denn $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}} = 1$ $\square$

Vorlesung Analysis I   WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An14: Spezielle Winkelfunktionen, exp/cos/sin Teil II

Stichworte: Kreiszahl π, Winkelberechnung, tan, arctan, cotan, arccot, hyperbolische Funktionen, Polarkoordinatendarstellung [Hoff, §4.8, 4.12]

14.1. Einleitung: Wir def. $\frac{\pi}{2}$ als die kleinste positive Nullstelle der reellen Cosinusfunktion. Winkel werden im Bogenmaß gemessen, und π entspricht dem Halbkreiswinkel. Wir behandeln noch weitere, spezielle Winkelfunktionen und hyperbolische Funktionen.

14.2. **Lemma:** $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}$: $\{z \in \mathbb{C};\ \exp(z)=1\} = \{n\alpha i;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Bew.: Sei zur Abkürzung $K := \{z \in \mathbb{C}; \exp(z)=1\}$ (=l.S.).

- Für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ gilt $|\exp(z)| = \exp(x)$,

  denn $|\exp(z)| = |\exp(x+iy)| = |\exp(x)| \cdot |\exp(iy)| \overset{8.10}{=} |\exp(x)| \cdot 1 = \underbrace{\exp(x)}_{>0 \text{ laut } 8.4.(5)}$.

  Somit gilt für $z = x+iy \in K$, dass $\exp(x) = |\exp(z)| = |1| = 1$, d.h. $\mathrm{Re}(z) = x = 0$.

  Also ist $K \subseteq \mathbb{R}i$.

- Nun gilt $\exp(i) = \cos(1) + i\sin(1)$ mit $\cos(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^{2j}}{(4j)!} + \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^{2j+1}}{(4j+2)!}$

  $= \sum_{j\geq 0} \left(\frac{1}{(4j)!} - \frac{1}{(4j+2)!}\right) > 0$, weil

  $$\frac{1}{(4j)!} - \frac{1}{(4j+2)!} > 0 \iff (4j+2)! > (4j)!$$
  $$\iff (4j+2)(4j+1) > 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0\ ✓$$

  Es folgt $\mathrm{Re}(\exp(i)) = \cos(1) > 0$.

- Nun gilt $\exp(2i) = \cos(2) + i\sin(2)$ mit $\cos(2) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} + \sum_{n\geq 3} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$

  $$= -\frac{1}{3} + \sum_{j\geq 1} \left(\frac{2^{4j+4}}{(4j+4)!} - \frac{2^{4j+2}}{(4j+2)!}\right) < 0,$$

  weil $\frac{2^{4j+4}}{(4j+4)!} - \frac{2^{4j+2}}{(4j+2)!} < 0 \iff \frac{2^{4j+4}}{2^{4j+2}} < \frac{(4j+4)!}{(4j+2)!}$

  $$\iff 4 = 2^2 < (4j+3)(4j+4) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0. \quad ✓$$

  Es folgt $\mathrm{Re}(\exp(2i)) = \cos(2) < 0$.

- Da $f(x) = \mathrm{Re}(\exp(xi))$ stetig ist, ex. laut ZWS 9.29 ein $b \in\,]1,2[$ mit $\mathrm{Re}(\exp(bi)) = \cos(b) = 0$. Es folgt $4bi \in K$,

  da $\exp(4bi) \underset{\text{de Moivre, } 8.4(7)}{=} \exp^4(bi) = (\underbrace{\cos(b)}_{=0} + i\sin(b))^4 = i^4 \sin^4(b) = \overbrace{\sin^4(b)}^{\geq 0}$

  $$\Rightarrow |\sin^4(b)| = |\exp(4bi)| \underset{8.10}{=} 1.$$

- Weiter weiß man, dass $K \neq \mathbb{R}i$,
  da etwa $\exp(2\cdot i) = \cos(2) + i\sin(2) \neq 1$ wegen $\cos(2) < 0 \Rightarrow 2i \notin K$.
- Hat man ein $yi \in K$ mit $y \in \mathbb{R}$, so folgt $\forall n \in \mathbb{Z} : nyi \in K$, ⊛
  denn $\exp(nyi) \overset{\text{dem.}}{=} \exp^n(yi) = 1^n = 1$. ⌈$y = 4b$ tut's, ebenso $y = -4b$⌋
- Setze $M := iK \cap \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $-4bi \in K$ und $(-4bi)i = 4b > 0 \Leftrightarrow 4b \in M$ ist $M \neq \emptyset$. Daher $\exists\ \alpha := \inf M$, haben $\alpha \neq 0$ da $K \neq \mathbb{R}i$.
  ⌈Sonst $]0,\varepsilon[\subseteq \operatorname{Im} K$. Sei $y \in \mathbb{R}$, dann $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}\cdot y < \varepsilon \overset{⊛}{\Rightarrow} \frac{1}{n}\cdot yi \in K \Rightarrow n\cdot(\frac{1}{n}yi) \in K \Rightarrow y \in \operatorname{Im} K$, ↯ zu $K \neq \mathbb{R}i$.⌋
- Es folgt $\{n\alpha i ;\ n \in \mathbb{Z}\} \subseteq K$ ✓ nach ⊛, aber auch „$\supseteq$" gilt:
  ⌈Wäre sonst $z = (n\alpha + r)i \in K$ mit $0 < r < \alpha$, so ist
  $1 = \exp(z) = \underbrace{\exp(n\alpha i)}_{=1}\cdot\exp(ri) = \exp(ri)$, d.h. $ri \in K$ und $-ri \in K$,
  also $r \in M$ mit $r < \alpha$, ↯ zu $\alpha = \inf M$.⌋ ☐

14.3. **Kreiszahl π:** Haben $\exp^{-1}(\{1\}) = \alpha i \cdot \mathbb{Z}$, $\alpha = 4b$, wo $\cos(b) = 0$, $b > 0$ minimal.

Diese Kleinste positive Nullstelle von cos bekommt von uns folgenden Namen:

Def.: $\frac{\pi}{2} := \min\{b \in \mathbb{R}_{>0} ;\ \cos(b) = 0\}$, und π heißt Kreiszahl.

Haben $1 < \frac{\pi}{2} < 2$ laut Beweis, sowie $\exp^{-1}(\{1\}) = 2\pi i\,\mathbb{Z}$. ⌈$\alpha = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$⌋

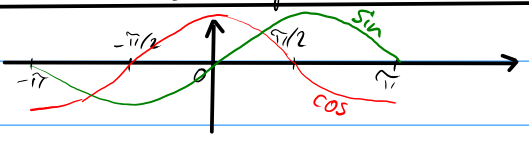
Bem.:
- $e^0 = 1 \Rightarrow \cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$.
- $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \exp(4\cdot\frac{\pi}{2}i) = \exp(2\pi i) = 1 = \sin(2\pi) + \cos(2\pi)$

$$\overset{\text{de Moivre}}{=} \exp^4\left(\frac{\pi}{2}i\right) = \left(i\sin\frac{\pi}{2}\right)^4$$

$$\Rightarrow \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = \pm 1.$$

⌈Benutzen die Formel von de Moivre in 8.4 (7).⌋

14.4. Diskussion des Graphen von cos und sin:



a) Es ist $\sin\frac{\pi}{2} = +1$, ⌈$\frac{\pi}{2} < 2 < \sqrt{6}$⌋
denn für $\sin\restriction]0,\sqrt{6}[$ ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots = \underbrace{x}_{>0}\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)}_{>0} + \frac{x^5}{5!}\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right)}_{>0} + \ldots > 0$$

b) Es ist $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = \underbrace{\cos(z)\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} - \sin(z)\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} = -\sin(z)$.

c) Es ist $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} + \sin(z)\underbrace{\cos(\pi/2)}_{=0} = \cos(z)$.

d) $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$, $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$ ⌈Zweimal b) & c) anwenden⌋

e) $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$, $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$ ⌈Zweimal d) anwenden⌋

f) $\cos_{|[0,\sqrt{6}]}$ ist streng antiton.

Bew.: • Zunächst gilt $\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}$.

⌈ wegen: $\cos(u \mp v) = \cos u \cos v \pm \sin u \sin v$

$\Rightarrow \cos(u+v) - \cos(u-v) = -2 \sin u \sin v$,

setze $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$. ⌋

• Sei $0 \leq y < x \leq \sqrt{6}$. Dann ist

$$\cos x - \cos y = -2 \underbrace{\sin\frac{x+y}{2}}_{>0} \underbrace{\sin\frac{x-y}{2}}_{>0} \underset{\text{nach a)}}{<} 0 \Rightarrow \cos x < \cos y.$$

□

g) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} = i$

h) $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ ⌈"Eulersche Formel"⌋

i) $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} \underset{h)}{=} e^z$.

j) jetzt 12.4: $\arcsin = \sin^{-1}$,
analog $\arccos = \cos^{-1}$

14.5. Charakterisierende Eigenschaft der Funktionen sin und cos:

Vor.: $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$, I echtes IV, $I \xrightarrow[c]{s} \mathbb{R}$ diff'bar, $s' = c$, $c' = -s$.

Anfangsbedingung: $s(0) = 0$, $c(0) = 1$.

Beh.: $s = \sin$, $c = \cos$.

Bew.: Sei $g := s - \sin$, $h := c - \cos$.

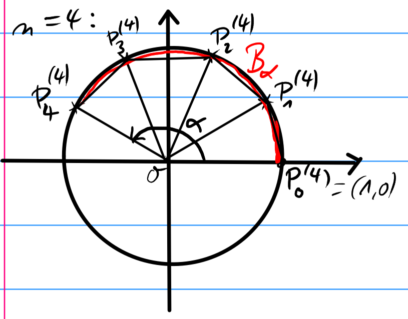
Dann ist $g' = h$, $h' = -g$, $g(0) = 0 = h(0)$. Sei $\varphi := g^2 + h^2$.

Dann ist $\varphi(0) = 0$, $\varphi' = 2gg' + 2hh' = 2(gh - hg) = 0$.

Also ist $\varphi = 0$, d.h. $g^2 = -h^2 \Rightarrow g^2 = h^2 = 0 \Rightarrow g = h = 0 \Rightarrow s = \sin, c = \cos$. □

14.6. Länge des Bogens $B_\alpha := \{(\cos t, \sin t);\ 0 \leq t \leq \alpha\}$: Sei $2\pi \geq \alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$k = 0, 1, \ldots, n$.



Es sei $P_k^{(n)} := \left(\cos\left(k\frac{\alpha}{n}\right), \sin\left(k\frac{\alpha}{n}\right)\right) \in \mathbb{R}^2$

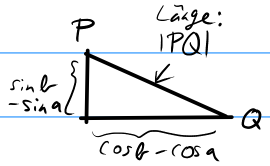
und $\mathcal{P}^{(n)}$ der Streckenzug der $P_k^{(n)}$,

d.h. $\mathcal{P}^{(n)}: P_0^{(n)} \rightsquigarrow P_1^{(n)} \rightsquigarrow P_2^{(n)} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow P_n^{(n)}$.

seine Länge sei $\ell(\mathcal{P}^{(n)})$.

Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(P^{(n)}) = \alpha.$

Bew.: Sei $P=(\cos a, \sin a)$, $Q=(\cos b, \sin b)$.



Dann ist $|PQ|^2 = (\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2$

$$= \left(2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$= 4\sin^2\frac{a-b}{2}\cdot\underbrace{\left(\cos^2\frac{a+b}{2}+\sin^2\frac{a+b}{2}\right)}_{=1} = 4\sin^2\frac{a-b}{2}.$$

$\Rightarrow |PQ| = 2\left|\sin\frac{a-b}{2}\right|.$

Damit gilt: $\ell(P^{(n)}) := \sum_{k=1}^{n} |P_{k-1}^{(n)} P_k^{(n)}| = 2\sum_{k=1}^{n}\left|\sin\frac{\alpha}{2n}\right|$

$$= 2n\left|\sin\frac{\alpha}{2n}\right| = \alpha\left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2n}}{\frac{\alpha}{2n}}\right| = \alpha\left|\frac{\sin\frac{\alpha}{2n}-\sin 0}{\frac{\alpha}{2n}-0}\right| \xrightarrow[\text{d.h. } \frac{\alpha}{2n}\to 0]{n\to\infty} \alpha\,|\underbrace{\sin'(0)}_{=\cos(0)=1}| = \underline{\underline{\alpha}}.$$

14.7. **Bem.:** Dies bestätigt, dass die Länge des Bogens B_α auf dem Einheitskreis α beträgt. Die Winkelmessung im Bogenmaß als Bogenlänge zu erklären, ist daher mathematisch sinnvoll. Die Bogenlänge eines Viertels des Einheitskreises z.B. beträgt somit $\frac{\pi}{2}$: so wird der Winkel im Bogenmaß gemessen.

Tangens und Cotangens samt Umkehrfunktionen

14.8. **Def.:** Tangens: $\tan := \frac{\sin}{\cos} : \mathbb{R}\setminus\{(2n+1)\frac{\pi}{2};\ n\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}.$

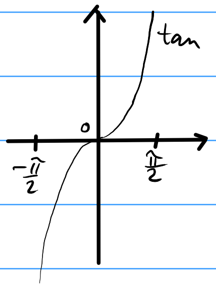
(1) a) tan diff'bar, $\tan' = 1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ wegen $\left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$

b) tan ist π-periodisch,

denn $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \overset{14.4.\,d)}{=} \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x).$

$\tan(-x) = -\tan(x)$, denn $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$.

c) $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ streng isoton: $\frac{1}{\cos^2} > 0$ ✓



d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \tan = -\infty.$

e) $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ wegen $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$

$$\underset{14.4.c)}{=} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

f) arctan $:= \left(\tan_{\restriction]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ist streng isoton, bijektiv, diff'bar und heißt Arcustangens.

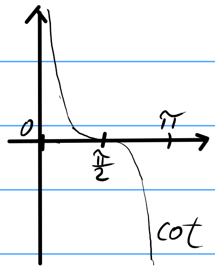
g) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ wegen $x = \arctan y \Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(y)} \overset{a)}{=} \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$.

14.9. Def.: Cotangens: $\cot := \frac{\cos}{\sin} : \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$.

a) cot ist diff'bar, $\cot' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2(x))$.

b) cot ist π-periodisch, $\cot(-x) = -\cot(x)$.

c) $\cot_{\restriction]0,\pi[}$ ist streng antiton.

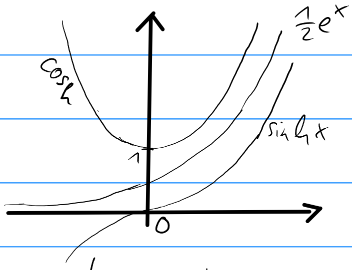


d) $\lim\limits_{x\to 0+} \cot x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi-} \cot x = -\infty$.

e) $\cot\frac{\pi}{4} = 1$.

f) arccot $:= \left(\cot_{\restriction]0,\pi[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$ streng antiton, bijektiv, diff'bar, und heißt Arcuscotangens.

g) $\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



Hyperbolische Funktionen

14.10. Sei $x \in \mathbb{R}$. $\mathfrak{Sin} = \mathrm{Sin} = \sinh$: $\quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\mathfrak{Cof} = \mathrm{Cos} = \cosh$: $\quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Dann heißt sinh der Sinus hyperbolicus und cosh der Cosinus hyperbolicus.

14.11. Eigenschaften:

a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$, $\sinh(0) = 0$.

$\cosh(-x) = \cosh(x)$, $\cosh(0) = 1$.

b) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ wegen l.S. $= (\cosh(x) + \sinh(x)) \cdot (\cosh(x) - \sinh(x))$

$= e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$.

c) $\sinh(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, $\cosh(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty$.

d) sinh diff'bar, $\sinh' = \cosh$, cosh diff'bar, $\cosh' = \sinh$

14.12. **Umkehrfunktionen von sinh, cosh:**

$\operatorname{arsinh} := (\sinh)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, streng isoton, bijektiv, diff'bar, heißt Areasinus hyperbolicus.

Haben: $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

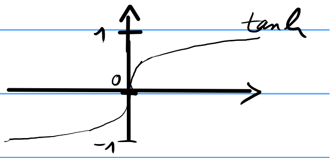
Bew.: $y = \operatorname{arsinh}(x)$

$$\Rightarrow \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(y)} = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} . \quad \square$$

$\operatorname{arcosh} := (\cosh)^{-1} : [1,\infty[\to [0,\infty[$ streng isoton, bijektiv, diff'bar, heißt Area cosinus hyperbolicus.

Haben: $\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

14.13. Tangenshyperbolicus: $\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$



a) $\tanh(-x) = -\tanh(x)$, $\tanh(0) = 0$.

b) tanh diff'bar, $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$.

b') tanh streng isoton

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ wegen

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow{x\to\infty} 1, \quad \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1,$$ da tanh ungerade.

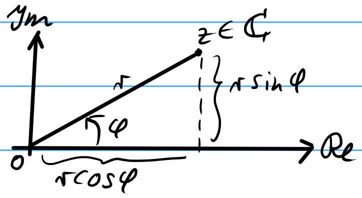
d) Umkehrfunktion: $\operatorname{artanh} := (\tanh)^{-1} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ ist streng isoton, diff'bar, ungerade, heißt Areatangens hyperbolicus.

Haben $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

14.14. Polarkoordinatendarstellung: Beschreiben jeden Punkt $z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $x,y \in \mathbb{R}$, im Polarkoordinatensystem eindeutig durch $(\varphi, r) \in [0,2\pi[\times \mathbb{R}_{>0}$

mit $z = r\exp(i\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

dabei gelten $r = |z|$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.



Der Winkel φ heißt Argument von z.

Der Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ von $z_1 = r_1\exp(i\varphi_1)$, $z_2 = r_2\exp(i\varphi_2)$ entspricht $z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp(i\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}_{\text{Addition der Argumente/Winkel}})$

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 15: Das Riemann-Integral

[Hoff, §5.2.1/2]

Stichworte: Unterteilung, Treppenfunktion, (Riemann-) Integrierbarkeit, Kriterien, Eigenschaften integrierbarer Fktn. und des (bestimmten) Integrals

---

15.1. Einleitung: Ausgehend von der Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken als Produkt der Seitenlängen soll eine Methode zur Berechnung des Flächeninhalts allgemeinerer (insbesonderer krummlinig begrenzter) Flächen wie z.B. der Kreis gewonnen werden. Als Methode dient die Ausschöpfung von innen und außen durch endlich viele (nichtüberlappende) Rechtecke.

Wir behandeln hier reelle Funktionen auf einem festen beschränkten abgeschlossenen echten Intervall $[a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$, betrachte also $\mathcal{F} := \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$.
Im folgenden sei also $[a,b]$ (vor-)gegeben. Schreibe stets $f \leq g$ für $\forall x \in [a,b]: f(x) \leq g(x)$.

15.2. Def.: • Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein Tupel $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt Unterteilung / Zerlegung (von $[a,b]$),
falls $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ gilt.

- Die x_j heißen Teilungspunkte / Stützpunkte, die n Intervalle $[x_{j-1}, x_j]$ die Teilintervalle der Unterteilung.
- Eine Unterteilung heißt äquidistant, wenn alle ihre n Teilintervalle gleichlang sind, d.h. falls $x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}$ für $j \in \{0, \ldots, n\}$ gilt.
- Eine Unterteilung $\underline{x}$ heißt (echt) feiner als eine Unterteilung $\tilde{\underline{x}}$, wenn die Teilungspunkte von $\underline{x}$ eine (echte) Obermenge der Teilungspunkte von $\tilde{\underline{x}}$ bilden.
- $h \in \mathcal{F}$ heißt Treppenfunktion, falls es eine Unterteilung $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ gibt mit $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$: $h_{\restriction]x_{j-1}, x_j[}$ konstant, etwa $= h_j \in \mathbb{R}$.

Sei $\mathcal{E} := \{h \in \mathcal{F};\ h \text{ Treppenfkt.}\}$ die Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$.

15.3. **Bsp.:** Die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\lfloor x\rfloor$ (Gaußklammerfunktion, eingeschränkt auf $[a,b]$) ist eine Treppenfunktion. Die zugehörige Unterteilung ist nicht eindeutig und kann beliebig verfeinert werden.

15.4. **Satz:** $\mathcal{E}$ ist Untervektorraum von $\mathcal{F}$.

Bew.: Haben $0\in\mathcal{E}$, und $h\in\mathcal{E}$, $\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha h\in\mathcal{E}$.
Seien $h,g\in\mathcal{E}$. Wähle Verfeinerung (durch Hinzufügen endlich vieler neuer Teilpunkte) so, dass OE h und g die gleiche Unterteilung haben. Mit dieser ist $h+g\in\mathcal{E}$. □

15.5. **Def.:** Der Inhalt / das Integral einer Treppenfkt. $h\in\mathcal{E}$ ist
$\int h := \int h(x)dx := \sum_{j=1}^{m} h_j(x_j-x_{j-1})$, und ist unabhängig von der gewählten Unterteilung $\underline{x}$, da dieser Wert invariant unter Verfeinerung ist.

15.6. **Satz:** $\int:\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ ist linear, d.h. $h,k\in\mathcal{E}$, $\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow\int(\alpha h+k)=\alpha\int h+\int k$.

Bew.: $\int\alpha h=\alpha\int h$ klar, für $h,k\in\mathcal{E}$ wähle OE die gleiche Unterteilung $\underline{x}$, damit ist $\int(h+k)=\sum_{j=1}^{m}(h_j+k_j)\cdot(x_j-x_{j-1})$

$$= \sum_{j=1}^{m} h_j(x_j-x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{m} k_j(x_j-x_{j-1}) = \int h+\int k. \quad \square$$

15.7. **Bem.:** $h,k\in\mathcal{E}$, $h\le k\Rightarrow\int h\le\int k$.
Anschaulich ist der Inhalt einer Treppenfunktion $h\ge 0$ der Flächeninhalt, den die Treppenfunktion mit der x-Achse (zwischen a und b) einschließt, und berechnet sich aus der Summe der Rechtecksflächen der Rechtecke mit Seitenlängen h_j und $x_j-x_{j-1}>0$. Für $h\in\mathcal{E}$ mit $h\not\ge 0$ ist gewollt, dass die "Fläche" $h_j(x_j-x_{j-1})$ auch negativ sein kann. Für beschränkte Funktionen auf $[a,b]$ unternehmen wir eine Annäherung des entsprechenden Inhalts mit dem Inhalt von Treppenfunktionen.

15.8. **Def.:** Sei $\mathcal{B}:=\mathcal{B}([a,b]):=\{f\in\mathcal{F};\ \exists M>0: |f|\le M\}$ die Menge der auf $[a,b]$ beschränkten Funktionen.

15.9. **Def.:** Sei $\mathcal{J}:=\mathcal{J}([a,b]):=\{f\in\mathcal{B};\ \forall\varepsilon>0\ \exists u,v\in\mathcal{E}$, u,v mit gemeinsamer Unterteilung:
$u\le f\le v$ und $\int v-\int u=\int(v-u)(x)dx<\varepsilon\}$ die Menge der auf $[a,b]$ (Riemann–) integrierbaren Funktionen.

Bem.: Sind u,v irgendwelche Treppenfunktionen mit $u\le f\le v$, kann zu einer gemeinsamen Unterteilung mit derselben Eigenschaft $u\le f\le v$ übergegangen werden.

15.10. **Satz:** $\mathcal{L}, \mathcal{J}$ sind UVRe von $\mathcal{F}$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$.

Bew.: Inklusionen klar, UVRe: $f \in \mathcal{J}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{J}$ klar, ebenso für $\mathcal{L}$,

weiter: $f, g \in \mathcal{J} \Rightarrow \exists\, u, v, \hat{u}, \tilde{v} \in \mathcal{E}: u \leq f \leq v,\ \hat{u} \leq g \leq \tilde{v},\ \int(v-u) < \frac{\varepsilon}{2},\ \int(\tilde{v}-\hat{u}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow u+\hat{u} \leq f+g \leq v+\tilde{v}$ mit $u+\hat{u}, v+\hat{v} \in \mathcal{E}$ (($\mathcal{E}$ gemeinsame Unterteilungen)

und $\int(v+\tilde{v}-(u-\hat{u})) \underset{\underline{15.6.}}{=} \int(v-u) + \int(\tilde{v}-\hat{u}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also: $f+g \in \mathcal{J}$. □

15.11. **Bem./Def.:** Sind $u, v \in \mathcal{E}$ mit $u \leq f \leq v$, so heißt $\int u$ eine untere Summe und $\int v$ eine obere Summe von f auf $[a,b]$. Wegen 15.7. ist $\int u \leq \int v$.

Eine spezielle untere und obere Summe ist $U_{\underline{x}} := \int u_{\underline{x}}$, $V_{\underline{x}} := \int v_{\underline{x}}$ für die Treppenfktn.

$u_{\underline{x}}(t) := \sup f([x_{j-1}, x_j[)$, $v_{\underline{x}}(t) := \inf f([x_{j-1}, x_j[)$, wenn $t \in [x_{j-1}, x_j[$.

15.12. **Satz:** Ist $f \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{L}$, so existieren $U := U_f := \sup\{\int u;\ u \in \mathcal{E},\ u \leq f\}$ und $V := V_f := \inf\{\int v;\ v \in \mathcal{E},\ f \leq v\}$, und es gilt $U = V$.

Bew.: Ex. von U klar, da $\emptyset \neq \{\int u;\ u \in \mathcal{E},\ u \leq f\}$ n.o. beschränkt durch $\int \overset{\text{Konstante Fkt.}}{m}$, $m := \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$, analog Ex. von V. Weiter $U \leq V$ klar wegen $\int u \leq \int v$ für $u \leq v$.

Ann.: $V > U$, dann nimm $\varepsilon := \frac{V-U}{2} > 0$, da $f \in \mathcal{J}$ ex. dazu $u, v \in \mathcal{E}$ mit $u \leq f \leq v$, $V - U \leq \int v - \int u < \varepsilon = \frac{V-U}{2}$, ↯. Also ist $U = V$. □

15.13. **Kor./Def.:** Ist $f \in \mathcal{J}$, so ex. $A \in \mathbb{R}$ mit $A = U = V$.

Notation: $\int_a^b f(x)\,dx := A$, wir nennen $\int_a^b f(x)\,dx$ das (bestimmte) Integral von f über $[a,b]$, bzw. das (Riemann-) Integral, auch: eigentliches Riemann-Integral.

(Sinnvoller wäre die Notation $\int_a^b f$, da die "Variable" x keine Rolle spielt.)

Die Fkt. f nennen wir Integrand(funktion), a und b heißen untere und obere (Integrations-) Grenze, und $[a,b]$ heißt Integrationsintervall.

15.14. **Bsp.:** Für $h \in \mathcal{E}$ ist $\int_a^b h(x)\,dx = \int h$, z.B. $\int_2^{10} \lfloor x \rfloor\,dx = \sum_{j=1}^{8} \overset{\swarrow \text{Wert von } \lfloor x \rfloor \text{ auf }]x_{j-1}, x_j[}{(j+1)} \cdot \underbrace{(j-(j-1))}_{=1}$

$\uparrow$ Unterteilung $(2, 3, \ldots, 10) = (x_0, x_1, \ldots, x_8)$

$= \sum_{j=2}^{9} j \underset{\text{Kl. Gauß}}{=} \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 - 1 = \underline{\underline{44}}$.

Erste, grundlegende Eigenschaft des Integrals:

15.15. Linearität: $f, g \in \mathcal{J}([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\int(f+g) = \int f + \int g$
$\int \alpha f = \alpha \int f$

$$\Longrightarrow \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Bew.: 15.6. mit $\inf(M+N) \overset{\textcircled{1}}{=} \inf M + \inf N \leq \sup M + \sup N \overset{\textcircled{2}}{=} \sup(M+N)$ für $M, N \subseteq \mathbb{R}$, wenn $M+N := \{m+n;\ m \in M, n \in N\} \subseteq \mathbb{R}$. ✓

Ausführlicher: • $f \in \mathcal{J} \Rightarrow \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$ klar, • Seien $f, g \in \mathcal{J}$, wissen schon $f+g \in \mathcal{J}$ wegen 15.10, noch z.z.: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Haben
$$\int_a^b f + \int_a^b g = \sup\{\textstyle\int u;\ u \in \mathcal{E}, u \leq f\} + \sup\{\textstyle\int \tilde{u};\ \tilde{u} \in \mathcal{E}, \tilde{u} \leq g\}$$
$$\underset{\textcircled{2}}{=} \sup\{\textstyle\int u + \int \tilde{u};\ u, \tilde{u} \in \mathcal{E}, u \leq f, \tilde{u} \leq g\}$$
$$= \sup\{\textstyle\int (u+\tilde{u});\ u, \tilde{u} \in \mathcal{E}, u \leq f, \tilde{u} \leq g\} \leftarrow \text{gleiche Unterteilung für } u \text{ und } \tilde{u}$$
$$\geq \sup\{\textstyle\int w;\ w \in \mathcal{E}, w \leq f+g\} = \int_a^b (f+g), \text{ da } f+g \in \mathcal{J}, \quad \rightsquigarrow w = u+\tilde{u}$$

analog
$$\int_a^b f + \int_a^b g = \inf\{\textstyle\int v;\ v \in \mathcal{E}, v \geq f\} + \inf\{\textstyle\int \tilde{v};\ \tilde{v} \in \mathcal{E}, \tilde{v} \geq g\}$$
$$\underset{\textcircled{1}}{=} \inf\{\textstyle\int v + \int \tilde{v};\ v, \tilde{v} \in \mathcal{E}, v \geq f, \tilde{v} \geq g\}$$
$$= \inf\{\textstyle\int (v+\tilde{v});\ v, \tilde{v} \in \mathcal{E}, v \geq f, \tilde{v} \geq g\} \leftarrow \text{gleiche Unterteilung für } v \text{ und } \tilde{v}$$
$$\leq \inf\{\textstyle\int \tilde{w};\ \tilde{w} \in \mathcal{E}, \tilde{w} \geq f+g\} = \int_a^b (f+g), \text{ da } f+g \in \mathcal{J}, \quad \rightsquigarrow \tilde{w} = v+\tilde{v}$$

es folgt die Gleichheit $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. □

15.16. **Def.:** Für $A \subseteq \mathbb{R}$ def. die charakteristische Funktion $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

15.17. **Beh.:** Für $f \in \mathcal{J}([a,b])$ und ein IV $A \subseteq \mathbb{R}$ (nicht notwendig beschränkt) gilt $\chi_A \cdot f \in \mathcal{J}([a,b])$.

Bew.: Für $h \in \mathcal{E}$ ist $\chi_A \cdot h \in \mathcal{E}$, ist $u, v \in \mathcal{E}$ geg. mit $u \leq f \leq v$ (auf $[a,b]$), $\int v - \int u < \varepsilon$, so folgt $\chi_A \cdot u \leq \chi_A \cdot f \leq \chi_A \cdot v$ mit
$\int \chi_A \cdot v - \int \chi_A \cdot u \leq \int v - \int u < \varepsilon$. □

15.18. **Def.:** Für $A \subseteq [a,b]$ schreiben wir $\int_A f(x)dx := \int_a^b (\chi_A \cdot f)(x)dx$,
ist etwa $A \in \{]c,d[, [c,d],]c,d], [c,d[\}$, schreibe $\int_c^d f(x)dx := \int_A f(x)dx$.

Speziell: $\int_c^c f(x)dx = 0$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$

15.19. **Additivität bzgl. der IVgrenzen:**

$\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b < c : f \in \mathcal{I}([a,c]) \Leftrightarrow f \in \mathcal{I}([a,b]) \cap \mathcal{I}([b,c]),$

dann gilt: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$ ⊛

Bew.: $f \cdot \chi_{[a,c]} = f \cdot \chi_{[a,b]} + f \cdot \chi_{[b,c]}$ mit Linearität 15.15. □

15.20. **Def.:** $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$ für $a < b$.

Bem.: Damit gilt 15.19⊛ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$. $\ulcorner$ z.B. $\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^b f - \int_a^b f = 0 = \int_a^a f$ ✓$\lrcorner$

$\ulcorner f \in \mathcal{I}([\min(a,b,c), \max(a,b,c)])\lrcorner$

$f \le g$
$\Rightarrow \int f \le \int g$

15.21. **Integralabschätzung/Monotonie:** $f, g \in \mathcal{I}([a,b]),\ f \le g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

Bew.: Sei $h := g - f \geq 0$, also $\int u \le \int_a^b h(x)\,dx \le \int v$ für $u, v \in \mathcal{E}$ mit $u \le h \le v$, wobei $u = 0$ zulässig ist mit $\int u = \int 0 = 0$, es folgt $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \underset{15.15.}{=} \int_a^b h(x)\,dx \geq 0.$ □

15.22. **Speziell:** • Da $\pm f \le |f|$, folgt $\pm \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \pm f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$, insb. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

• Gilt $m \le f(x) \le M$ für $m, M \in \mathbb{R}$ und alle $x \in [a,b]$, folgt $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$

Bsp.: $-\int_a^b x\,dx \le \int_a^b x \sin(x)\,dx \le \int_a^b x\,dx.$

Für die explizite Berechnung konkreter bestimmter Integrale von Funktionen, die keine Treppenfunktionen sind, benötigen wir, dass das $\int$ als Limes von Rechtecksummen bzw. Riemannsummen berechnet werden kann.

15.23. **Def.:** • Ist $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ eine Unterteilung von $[a,b]$, so heißt $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\forall j \in \{1, \ldots, n\}: x_{j-1} \le z_j \le x_j$ eine **Belegung / Zwischenpunktauswahl** von $\underline{x}$.

• Wir nennen $\Delta(\underline{z}) := \max\{|x_j - x_{j-1}|; j \in \{1, \ldots, n\}\}$ die **Feinheit** von $\underline{x}$.

• Ist $f : [a,b] \in \mathbb{R}$, so heißt

$$S(f, \underline{x}, \underline{z}) := \sum_{j=1}^{n} f(z_j) \cdot (x_j - x_{j-1})$$ eine **Zwischensumme / Riemannsumme**

auch: **Rechtecksumme**

von f zur Unterteilung $\underline{x}$ und Belegung $\underline{z}$.

An 15

15.24. **Satz:** Die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist genau dann (Riemann-) integrierbar, wenn für alle Folgen von Unterteilungen $\underline{x}_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta(\underline{x}_n)=0$ und alle zu $\underline{x}_n$ gehörigen Belegungen $\underline{z}_n$ die Folge $S(f,\underline{x}_n,\underline{z}_n)$ gegen ein und denselben GW strebt. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}S(f,\underline{x}_n,\underline{z}_n).$$

Bew. (nur Beweis-Skizze, für ausführlichen Beweis s. [Heuser, Satz 82.3, 83.1]

„$\Rightarrow$“: Sei f int'bar, sei $n\in\mathbb{N}$, seien dazu $\underline{x}_n$, $\underline{z}_n$ gegeben mit $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta(\underline{x}_n)=0$.

Dazu ex. laut Vor. $u_n, v_n\in\mathcal{E}$ mit $u_n\le f\le v_n$ und $\int(v_n-u_n)<\frac{1}{n}$, wobei $\underline{x}_n$ die gemeinsame Unterteilung von u_n, v_n sei (die $\underline{z}_n$ müsste man noch anpassen ...).

Haben $\int u_n\le U$, $V\le\int v_n$ mit U,V aus 15.12, wo $U=V=\int_a^b f(x)\,dx$, da f int'bar.

Also ist $0\le U-\int u_n\le U-\int u_n+\int v_n-V\underset{U=V}{=}\int(v_n-u_n)<\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$, ebenso $\int v_n-V\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,

es folgt $\int u_n\to\int_a^b f(x)\,dx\leftarrow\int v_n$.

Wegen $\int u_n\le S(f,\underline{x}_n,\underline{z}_n)\le\int v_n$ folgt mit dem Sandwichlemma 5.26.(e), dass $\lim\limits_{n\to\infty}S(f,\underline{x}_n,\underline{z}_n)=\int_a^b f(x)\,dx$.

„$\Leftarrow$“: Sei die Bedingung erfüllt, z.z.: f int'bar. Sei $n\in\mathbb{N}$ und $\underline{x}$ die äquidistante Unterteilung von $[a,b]$ der Feinheit $\Delta(\underline{x})=\frac{b-a}{n}$ $(\xrightarrow[n\to\infty]{}0)$ und setzen $u_n, v_n\in\mathcal{E}$ dazu als $u_n=u_{\underline{x}}$, $v_n=v_{\underline{x}}$ aus 15.11, laut Konstruktion ist $u_n\le f\le v_n$, für alle $n\in\mathbb{N}$.

Sei nun $\varepsilon>0$. Da $S(u_n,\underline{x},\underline{z})\le S(v_n,\underline{x},\underline{z})$ für $n\to\infty$ gegen denselben GW streben, ex. n_0 so, dass $\forall n\ge n_0$: $\int v_n-\int u_n=S(v_n,\underline{x},\underline{z})-S(u_n,\underline{x},\underline{z})<\varepsilon$; dabei bezeichnet $\underline{z}$ irgendeine Belegung der Unterteilung $\underline{x}$. Also ist f int'bar.

Bem.: Haben $\underbrace{S(u_n,\underline{x},\underline{z})}\le S(f,\underline{x},\underline{z})\le\underbrace{S(v_n,\underline{x},\underline{z})}$, diese Schranken heißen "Untersumme" und "Obersumme" bzgl. $\underline{x}$, vgl. 15.11. □

15.25. **Bsp:** $\int_a^b x^2\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^n x_j^2\cdot(x_j-x_{j-1})\underset{\uparrow}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^n\left(a+j\cdot\frac{b-a}{n}\right)^2\cdot\frac{b-a}{n}$,

$\underline{x}=(a,a+\Delta,\dots,a+n\Delta=b)$ mit Feinheit $\Delta=\frac{b-a}{n}$

speziell $a=0$: $\frac{b^3}{n^3}\sum\limits_{j=1}^n j^2\underset{\substack{\uparrow\\ \text{VI}}}{=}\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{b^3}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{6n^3}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{b^3}{3}$, also: $\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}$.

"Pyramidenformel"

□

Ein einfaches Kriterium für Integrierbarkeit ist:

15.26. **Satz**: Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Beh.: f ist auf $[a,b]$ int'bar.

Bem.: wird mit $\mathscr{C}([a,b])$ die Menge der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ bezeichnet, so besagt der Satz, dass $\mathscr{C}([a,b]) \subseteq \mathcal{J}([a,b])$ gilt.

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$, gesucht: $\mu, \nu \in \mathcal{E}$ mit $\mu \le f \le \nu$, $\int(\nu - \mu) < \varepsilon$.

Hier wird "glm. Stetig" benutzt.

Da f auf $[a,b]$ stetig, ist f sogar gleichmäßig stetig laut Satz 10.8. Zu $\eta := \frac{\varepsilon}{b-a}$ ex. deswegen ein $\delta > 0$ mit: $|x - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \eta$.
Wähle nun eine Zerlegung $\underline{x}$ von $[a,b]$ der Feinheit $\Delta(\underline{x}) = \delta$, also gelte $|x_j - x_{j-1}| < \delta$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Mit $\mu := \mu_{\underline{x}}$, $\nu := \nu_{\underline{x}}$, d.h.

$\mu(t) := \mu_j$ für $t \in [x_{j-1}, x_j]$, alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $\mu_j := \min\{f(t);\ t \in [x_{j-1}, x_j]\} =: f(t_j)$,

$\nu(t) := \nu_j$ für $t \in [x_{j-1}, x_j]$, alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $\nu_j := \max\{f(t);\ t \in [x_{j-1}, x_j]\} =: f(\tilde{t}_j)$

(t_j, $\tilde{t}_j$ ex. nach 9.30 (Satz vom Min./Max.), da f stetig auf $[x_{j-1}, x_j]$),

sind $\mu, \nu \in \mathcal{E}$ definiert mit $\mu \le f \le \nu$ und

$$\int(\nu - \mu) = \sum (\nu_j - \mu_j)(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(f(t_j) - f(\tilde{t}_j)\right)}_{\le \eta} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

$$\le \eta \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{m} (x_j - x_{j-1})}_{\text{Teleskopsumme}} = \eta (x_m - x_0) = \eta (b - a) = \varepsilon.$$

Also ist f int'bar. □

Weitere Eigenschaften des bestimmten Integrals:

15.27. **Satz**: Seien $f, g \in \mathcal{J}$, dann: i) $f \cdot g \in \mathcal{J}$, ii) $g \ge \alpha$ in $[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{J}$,
iii) $f : [a,b] \to [c,d]$ int'bar, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ int'bar.

Bew.: Zitieren [Heuser, Satz 84.8 / 84.9], dort nur Beweisandeutung. □

Bem.: in iii) kann "g stetig" nicht durch "g int'bar" ersetzt werden, s. [Heuser, Aufg. 7 §84].

15.28. Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei $f \in \mathcal{J}([a,b])$, $g \ge 0$ (oder $g \le 0$).

Beh.: a) $\exists \mu \in [\inf f, \sup f]$: $\int_a^b (fg)(t)\,dt = \mu \int_a^b g(t)$, b) f stetig $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b] : \mu = f(\xi)$.

Bew.: b): ZWS für f ✓, a): da $\inf f \le f \le \sup f$ folgt $(\inf f) \cdot g \le fg \le (\sup f) \cdot g$,
also $(\inf f) \cdot \int_a^b g(t)\,dt \le \int_a^b (fg)(t)\,dt \le (\sup f) \int_a^b g(t)\,dt$ mit 15.21 $\Rightarrow$ Beh. □

Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 16: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

[Hoff § 52]

Stichworte: Stammfunktionen, partielle Integration, Substitutionsregel, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), Integralfunktionen, Integraltafel, Hauptsatzkantate

---

16.1. Einleitung: Wir betrachten Stammfunktionen und leiten Rechenregeln dafür her. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) liefert die Verbindung zwischen Stammfunktionen (den unbestimmten Integralen) und den Riemann-Integralen (den bestimmten Integralen), und damit erhalten wir einfachere Möglichkeiten zur konkreten Berechnung bestimmter Integrale (als im vorigen Kapitel).

16.2. Sei im folgenden $j \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes IV, alle Funktionen seien auf j definiert und reellwertig.

Def.: F heißt eine Stammfunktion (SF) von f, falls $F' = f$ ist.

Notation: $\int^x f(t)\,dt = F(x)$. Wir nennen dies ein "unbestimmtes Integral".

Dabei ist eine SF per Definition diff'bar.

16.3. Bem.: Sind F_1, F_2 zwei SFen von f, so ist $F_1' = f = F_2'$, also $(F_2 - F_1)' = 0$, d.h. $F_2 - F_1$ ist konstante Funktion, etwa $= c$.

Dann ist $F_2 = F_1 + c$, und für $c \neq 0$ sind F_1 und F_2 verschieden.

Also: SFen sind bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Beachten, dass $\int^x f(t)dt = F(x) \wedge \int^x f(t) = G(x)$ nicht $F(x) = G(x)$ impliziert.

16.4. Linearität: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und zwei stetige Funktionen $f, g : j \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int^x (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt = \alpha \int^x f(t)\,dt + \beta \int^x g(t)\,dt.$$

Bew.: $(\text{r.S.})' = \left(\alpha \int^x f(t)dt + \beta \int^x g(t)dt\right)' = \alpha \left(\int^x f(t)dt\right)' + \beta \left(\int^x g(t)dt\right) = \alpha f(x) + \beta g(x).$ □

Speziell: $\int^x (f(t) \pm g(t))\,dt = \int^x f(t)dt \pm \int^x g(t)dt$, $\quad \int^x (\alpha f)(t)dt = \alpha \int^x f(t)dt$

An 16

$\int u'v = uv - \int uv'$

16.5 **Partielle Integration:** Für zwei stetig diff'bare Funktionen $u, v : j \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int^x u'(t)v(t)\,dt = u(x)v(x) - \int^x u(t)\,v'(t)\,dt.$$

Bew.: $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow u'v = (uv)' - uv'$, es folgt die Beh. □

16.6. **Bsp.:**

- $\int^x \ln(t)\,dt = \int 1 \cdot \ln(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ u'=1,\, v=\ln(t) \leadsto u=t,\, v'=\frac{1}{t}}}{=} x\ln(x) - \int^x t \cdot \frac{1}{t}\,dt = x\ln(x) - x$ (für $x>0$).
- $\int^x t\,3^t\,dt \underset{\substack{u'=3^t,\, v=t}}{=} 3^t \cdot \frac{t}{\ln(3)} - \int^x 3^t \frac{dt}{\ln(3)} = \frac{3^t t}{\ln(3)} - \frac{3^t}{\ln^2(3)}$

$\int^x f(\varphi)\varphi' = \int^{\varphi(x)} f$

16.7. **Substitutionsregel:** Sei $\varphi : i \to j$, i echtes IV, φ diff'bar, $f : j \to \mathbb{R}$ stetig.

Beh.: $$\int^x f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int^{\varphi(x)} f(s)\,ds.$$

"Läuft t bis x, so läuft $s=\varphi(t)$ bis $\varphi(x)$"

Bew.: Ist F SF zu f, so gilt laut Kettenregel

$$(F \circ \varphi)' = F'(\varphi) \cdot \varphi' = f(\varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi',$$

also ist eine SF von $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ bei x gleich $(F \circ \varphi)(x) = F(\varphi(x)) = \int^{\varphi(x)} f(t)\,dt$. □

16.8. **Bsp:** Sei $\varphi(t) \neq 0$ für alle t. Dann: $\int^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt = \int^{\varphi(x)} \frac{ds}{s} \overset{!}{=} \ln|\varphi(x)|$.

Bew. für „$\overset{!}{=}$": Sei $f(s) = \frac{1}{s}$, und für $x \neq 0$ ist $|x|' = \operatorname{sign}(x)$,

wir haben $(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sign}(x) = \frac{1}{x}$. □

Bsp.:

- $\int^x \frac{2t}{t^2}\,dt = \int^{x^2} \frac{ds}{s}$ gilt, denn l.S. $= \int^x \frac{2}{t}\,dt = 2\ln|x|$, r.S. $= \int^{x^2} \frac{ds}{s} = \ln|x^2| = 2\ln|x|$ ✓.
- $\int^x \frac{-\sin t}{\cos^2 t}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)=\frac{1}{t^2},\, \varphi(t)=\cos t \leadsto F(t)=\frac{1}{t}}}{=} \int^{\cos x} t^{-2}\,dt = -\frac{1}{\cos x}$.

16.9. **Variante der Substitutionsregel:** In einem IV, wo φ' konstantes VZ hat (wenn dort φ' keine Nst. hat), ist φ umkehrbar. Sei $\psi = \varphi^{-1}$ die zugehörige Umkehrfkt., es gilt damit also $\psi'(t) = \frac{1}{\varphi'(t)}$, und 16.7. liefert (vertausche s mit t):

$$\int^{\varphi(x)} f(\psi(s))\,\psi'(s)\,ds = \int^x f(t)\,dt.$$

Bsp.: $\int_0^1 3^{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} t\,3^t\,dt$ mit $\psi(x) = \sqrt{2x+1}$, $f(t) = t\,3^t$, $\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ $\leadsto 1 = \varphi(x) \Leftrightarrow x = \psi(1) = \sqrt{3}$

16.10. **Bem.:** Funktionen, die nicht elementar integrierbar sind, sind z.B. e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$.

16.11. Im folgenden bringen wir die Verbindung zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen in Form des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Dieser hat zwei Teile: Teil 1 besagt, dass mit einer SF F des Integranden f ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ berechnet werden kann, und Teil 2 besagt, dass mit einer Integralfunktion $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ eine SF von f vorliegt.

16.12. **Hauptsatz (HDI, Teil 1):**

Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ int'bar,
$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, F diff'bar in $]a,b[$, $F' = f$ (d.h. F ist SF von f).

Beh.: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: F\big|_a^b = F(x)\big|_a^b = F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$.

Bew.: Für $\varepsilon > 0$ $\exists\, h, k \in \mathcal{E}$ mit $h \le f \le k$ und $\int(k-h) < \varepsilon$.
Wähle eine gemeinsame Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ von h und k.
MWS auf F liefert: $\exists\, \xi_j \in \,]x_{j-1}, x_j[$ mit

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1}).$$

Damit ist
$$\int h = \sum_{j=1}^m h(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \le \sum_{j=1}^m f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^m (F(x_j) - F(x_{j-1}))$$
$$= F(b) - F(a) \le \sum_{j=1}^m k(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \int k,$$

also:
$$\int h \le F(b) - F(a) \le \int k$$
$$\downarrow \varepsilon \to 0 \qquad\qquad \downarrow \varepsilon \to 0$$
$$\int_a^b f(t)\,dt \le F(b) - F(a) \le \int_a^b f(t)\,dt,$$
also die Beh. □

16.13. **Bsp.:** (1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan\big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$. (2) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin\big|_0^{\pi/2} = 1$.

16.14. **Situation:** Sei $J \subseteq \mathbb{R}$, J echtes IV, $f : J \to \mathbb{R}$ „lokal integrierbar",
d.h. $\forall$ IVe $[\alpha, x] \subseteq J$: $f\restriction_{[\alpha,x]}$ int'bar.

Dies gilt etwa, wenn J abgeschlossen und beschränkt und f stetig, also glm. stetig (vgl. 15.26/10.8).

Def.: Für $\alpha \in J$ fest definiere $F(x) := \int_\alpha^x f(t)\,dt$ für alle $x \in J$,
erhalten eine Funktion $F : J \to \mathbb{R}$, die wir Integralfunktion nennen.

16.15. **Satz:** Eine Integralfunktion wie in 16.14 ist stetig (sogar "lokal dehnungsbeschränkt"/"Lipschitz-stetig").

Bew.: Für $x_0, x \in J$ ist $|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \le \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \le M|x - x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.
(wo $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq J$, auf dem $\exists\, M$ mit $|f| \le M$). □

16.16. **Hauptsatz (HDI, Teil 2):** Sei wie in 16.14 f und F geg. und f in $x_0 \in J$ stetig.
Dann ist F in x_0 diff'bar, $F'(x_0) = f(x_0)$.

Korollar: f stetig $\Rightarrow$ F diff'bar, $F' = f$.

Bew.: $|F(x)-F(x_0)-f(x_0)(x-x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))dt\right|$

$\le |x-x_0| \sup_t |f(t)-f(x_0)|$ über $t\in[x_0,x]\cup[x,x_0]\subseteq J$.

Somit:

Sei $r(x) := \frac{F(x)-F(x_0)-f(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}$,

also $|r(x)| \le \sup_t |f(t)-f(x_0)| \xrightarrow{x\to x_0} 0$, da f stetig in x_0,
d.h. $r(x)$ ist in x_0 stetig, und $r(x_0)=0$.

Es folgt die Beh. mit 11.4(3). □

16.17. **Bem.:** Man kann Teil 1 des HDIs auch aus Teil 2 herleiten:
Betrachtet man die Integralfkt. $G(x):=\int_a^x f(t)dt$, so ist diese laut Teil 2 eine SF von f. Da auch F laut Vor. in Teil 1 eine SF ist, gilt $G(x)=F(x)+c$, also wegen $G(a)=0$ haben wir $c=-F(a)$.
Daher folgt $\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b)+c = F(b)-F(a)$. □

16.18. **Bsp.:** 1) Man berechne den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x)=9-x^2$ und $g(x)=1-\frac{x^2}{9}$ eingeschlossen wird.
Berechne die Schnittpunkte durch: $9-x^2=1-\frac{x^2}{9} \Leftrightarrow 8=\frac{8}{9}x^2 \Leftrightarrow 9=x^2 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-3$.
Die gesuchte Fläche ist: $\int_{-3}^{3} f(x)dx - \int_{-3}^{3} g(x)dx = \int_{-3}^{3}(f(x)-g(x))dx = \int_{-3}^{3}(8-\frac{8}{9}x^2)dx$

$$= 8x\Big|_{-3}^{3} - \frac{8}{27}\cdot x^3\Big|_{-3}^{3} = 8\cdot(3+3)-\frac{8}{27}\cdot(27+27)$$
$$= 8\cdot 6 - 8\cdot 2 = 8\cdot 4 = \underline{\underline{32}}.$$

2) Man berechne den Flächeninhalt des Vierteleinheitskreises,
d.h. der Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ($=:y$ erfüllt $x^2+y^2=1$, d.h. $(x,\underbrace{f(x)}_{=y})$ liegt auf dem Einheitskreisrand).

Dieser ist $\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ t=\sin(x)\\ \psi(x)=\sin(x),\\ dt=\cos(x)dx}}{=} \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(x)dx = \int_0^{\pi/2}\cos^2(x)dx$

$$\underset{\substack{\nearrow\\ \cos(2x)=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos(2x))dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}+\underbrace{\frac{\sin(2x)}{2}\Big|_0^{\pi/2}}_{=0}\Big) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

Der volle Einheitskreis hat dann den Flächeninhalt π.

Kleine Integraltafel:

$f(x),\ F'(x)$	$\int^x f dt,\ F(x)$	Bemerkung
x^α	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$x>0,\ \alpha\neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x\neq 0$
e^x	e^x	
$\ln x$	$x\ln x - x$	$x>0$
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\frac{1}{(\cos x)^2}=1+(\tan x)^2$	$\tan x$	$x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\lvert x\pm\sqrt{x^2+a^2}\rvert$	$a\neq 0,\ x^2+a>0$
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\frac{1}{(\cosh x)^2}=1-(\tanh x)^2$	$\tanh x$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$x>1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$	

Anhang:

Die "Hauptsatz Kantate" von Friedrich Wille aus dem Buch "Humor in der Mathematik" ist eine musikalische Umsetzung des HDIs.

- Teil 2 des HDIs ist genau die 1. Strophe:

"Es sei f stetige Funktion auf einem Intervall.
Dann existiert von a bis x dazu das Integral.
Fasst x man als Variable auf, erhält man hohen Lohn:
Dies ist von f die (aller-)schönste Stammfunktion."

- Teil 1 des HDIs ist genau die 2. Strophe:

"Das Integral von a bis x errechnet man nun leicht.
Mit einer Stammfunktion von f ist's alsobald erreicht.
Man subtrahiert in b und a, - das ahnen alle schon -
die Werte dieser (wunder-) schönen Stammfunktion."

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K Halupczok

An 17: Stammfunktionen rationaler Funktionen

Stichworte: Stammfunktionen rationaler Funktionen, Polynomdivision, Nullstellenabspaltung, Hauptsatz der Algebra, Partialbruchzerlegung

---

17.1. Einleitung: Wir beschreiben eine Methode zur Auffindung von Stammfunktionen rationaler Funktionen der Form $\frac{p}{q}$ mit Polynomen $p, q \in \mathbb{C}[z]$. Nach Polynomdivision genügt es, den Fall $\deg p < \deg q$ zu betrachten. Dann wird q als Produkt von Linearfaktoren geschrieben, nach einer Partialbruchzerlegung wird die S.F. gefunden.

17.2. Stammfunktionen rationaler Funktionen

Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $\deg q =: n \geq 1$. Mit $f = \frac{p}{q}$ ist eine rationale Fkt. geg., vgl. 9.25.
Wir beschreiben das Verfahren zur Auffindung einer SF von f.

17.3. Bsp.: Sei $f(x) = (3x^5 + 9x^4 - 28x^3 + 13x^2 + 6x - 59) : (x^2 + 3x - 10)$.

0) Polynomdivision / Div. mit Rest 17.4 liefert

$$f(x) = 3x^3 + 2x + 7 + \frac{5x+11}{x^2+3x-10}.$$

Eine SF von $3x^3 + 2x + 7$ ist $\frac{3}{4}x^4 + x^2 + 7x$.

Gesucht ist noch eine SF von $\frac{5x+11}{x^2+3x-10}$, wo deg Zähler $< n$.

(Allg.: $\frac{p}{q} = \text{Polynom} + \frac{\tilde{p}}{q}$, wo $\deg \tilde{p} < \deg q = n$.)

1) Bestimme die Nullstellen des Nenners q (hier quadratisches Polynom).

Hier: $2, -5$, somit ist $q = (x-2)(x+5)$.

2) Finde Darstellung $\frac{5x+11}{(x-2)(x+5)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+5}$, also finde a, b.

⇝ "Partialbruchzerlegung"

- Multipliziere dazu mit q ⇝ $5x + 11 = a(x+5) + b(x-2) = (a+b)x + 5a - 2b$.
- Koeffizientenvergleich liefert $5 = a + b$, $11 = 5a - 2b$

(LGS, n Glgn. in n Unbekannten)

Hier: $a = 3$, $b = 2$. Somit: $\frac{\tilde{p}}{q} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+5}$.

3) Finde SF für $\frac{1}{x-\alpha}$, hier $\alpha \in \mathbb{R}$: $\int^{*} \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \ln|x-\alpha|$,

Ergebnis: SF zu $f = \frac{p}{q}$ ist $\frac{3}{4}x^4 + x^2 + 7x + 3\ln|x-2| + 2\ln|x+5|$.

Polynomdivision

17.4. Euklidischer Algorithmus (Division mit Rest) für Polynome / Satz von der Polynomdivision: Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$.

Beh.: $\exists!\, S, R \in \mathbb{C}[z]$ mit $\deg R < \deg q = n$ und $p = S \cdot q + R$.

Bsp.: • $\underbrace{(x^2-2)}_{p} : \underbrace{(x-1)}_{q} = \underbrace{x+1}_{=P} - \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{=\frac{R}{q}}$, denn $x^2-2 = (x+1)\cdot(x-1) \underbrace{-1}$

Rest bei der Division

Verfahren:

$$
\begin{array}{l}
(x^2-2) : (x-1) = x + 1 + \frac{\overset{\text{Rest}}{-1}}{x-1} \\
\underline{-(x^2-x)} \\
\quad x-2 \\
\quad \underline{-(x-1)} \\
\qquad -1 \leftarrow \text{Rest}
\end{array}
$$

•

$$
\begin{array}{l}
(3x^5+9x^4-28x^3+13x^2+6x-59) : (x^2+3x-10) = 3x^3+2x+7+\frac{5x+11}{x^2+3x-10} \\
\underline{-(3x^5+9x^4-30x^3)} \\
\qquad\qquad 2x^3+13x^2+6x \\
\qquad \underline{-(2x^3+6x^2-20x)} \\
\qquad\qquad\qquad 7x^2+26x-59 \\
\qquad\qquad \underline{-(7x^2+21x-70)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 5x+11
\end{array}
$$

Rest

$5x+11$ ← Rest $\neq 0$, Polynomdiv. geht nicht auf

17.5. Def.: • Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, die Menge der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ wie in 9.24 bezeichnen wir mit $\mathbb{K}[X] = \{P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j;\ a_0,\dots,a_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}$.
Schreiben auch $a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ oder $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ für P.

• Ein Polynom der Form X^i heißt ein Monom. Das Polynom $P=0$ (mit $a_0=0$) heißt Nullpolynom. Ist $P \neq 0$, so heißt $n := \max\{k \in \mathbb{N}_0;\ a_k \neq 0\}$ der Grad von P, a_n heißt dann der Leitkoeffizient von P. Schreiben $\deg P = n$, es sei $\deg 0 := -1$ (auch: $-\infty$). Ist der Leitkoeffizient $= 1$, so heißt P normiert. Polynome vom Grad 1 heißen linear.

• Jedes Polynom $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ erzeugt eine Fkt. auf $\mathbb{K}$, die Polynomfunktion $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$.

- Für Polynome $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ und $Q = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m \in \mathbb{K}[X]$ mit $n \geq m$, man setze dabei $b_{m+1} := 0, \ldots, b_{n-1} := 0, b_n := 0$ falls $m < n$,
def. $P+Q := (a_0+b_0) + (a_1+b_1)X + \ldots + (a_n+b_n)X^n \in \mathbb{K}[X]$
und $P \cdot Q := c_0 + c_1 X + \ldots + c_{n+m} X^{n+m} \in \mathbb{K}[X]$
mit $c_j = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}$, d.h. $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots$ usw.
(vgl. Cauchyproduktsatz 7.28).

17.6. **Bem.:** • $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ ist kommutativer Ring mit 1 (und heißt Polynomring), d.h. es gelten die Axiome (A1)-(A4), (M1)-(M3), (D) in 2.2.

- Für alle Polynome $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ gilt: $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, und ist $P \neq 0 \neq Q$, gilt: $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- Im Satz 17.4 von der Polynomdivision nennt man R den Rest der Polynomdivision von p durch q, und S den Quotienten (der ..."...).
Polynomringe erlauben also eine Division mit Rest, genau wie im Ring $\mathbb{Z}$.
- Beweis von 17.4 s. Anhang.

(wie etwa $\begin{array}{l} 253 : 17 = 14 \\ \underline{17} \\ 83 \\ \underline{68} \\ 15 \leftarrow \text{Rest } 15 \end{array}$ ↗ Also: $\underbrace{253}_{p} = \underbrace{14}_{s} \cdot \underbrace{17}_{q} + \underbrace{15}_{R}$)

Nullstellenabspaltung

17.7. **Def.:** Ein El. $x_0 \in \mathbb{K}$ heißt Nullstelle des Polynoms $P \in \mathbb{K}[X]$, wenn x_0 Nullstelle der zugeh. Polynomfkt. $\mathbb{K} \to \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$ ist, also $P(x_0) = 0$ gilt.

17.8. **Kor.:** Genau dann ist x_0 Nullstelle eines Polynoms $P \in \mathbb{K}[X]$, wenn es eine Faktorisierung $P = (X - x_0) \cdot S$ mit $S \in \mathbb{K}[X]$ gibt.
d.h. Zerlegung in ein Produkt
(von nichttrivialen Faktoren)

"Nullstellenabspaltung"/
"Abspaltung eines Linearfaktors"

Bew.: • Ist x_0 Nullstelle von P, so erhalten wir als Spezialfall von Satz 17.4 für P die Darstellung $P = S \cdot (X - x_0) + R$ mit $R, S \in \mathbb{K}[X]$, und $\deg R < 1$, also ist $R \in \mathbb{K}$, und zwar $R = \underbrace{P(x_0)}_{=0} - S(x_0) \cdot \underbrace{(x_0 - x_0)}_{=0} = 0$, die Beh. • Umgekehrt folgt aus dieser Darstellung unmittelbar, dass x_0 Nullstelle von P ist. □

17.9. **Bem.:** • Ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n $\underset{\text{paarweise verschiedene}}{\text{p.w.v.}}$ Nullstellen.

• Ein Faktor der Form $X - x_0$ heißt Linearfaktor.

• Ist $\mathbb{K}$ unendlich, so gehören zu $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq Q$ auch verschiedene Polynomfunktionen.
⌜Wäre nämlich $P(x) = Q(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$, so hätte $P - Q$ unendl. viele Nullstellen⌟

• Nicht jedes Polynom besitzt eine Nullstelle, wie z.B. $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
Als Polynom in $\mathbb{C}[X]$ aufgefasst hat es aber Nullstellen, nämlich $i, -i$.
Dies folgt (für jedes Polynom in $\mathbb{C}[X]$) aus 17.10:

17.10. Fundamentalsatz /Hauptsatz der Algebra: Jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $\deg P \geq 1$ besitzt eine Nullstelle (in $\mathbb{C}$).
⌜ohne Beweis; Beweis siehe in Vorlesungen zur Funktionentheorie, Algebra, … auch elementar-analytisch möglich, s. z.B. [Heuser, Satz 69.1/ Aufg. 7/8 in Nr. 187]

Daraus folgt sofort:

17.11. **Kor.:** Jedes Polynom P über $\mathbb{C}$ mit $\deg P \geq 1$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren, d.h. ist Produkt von Polynomen vom Grad 1.

17.12. **Bsp.:** • $X^4 - 5X^3 + 3X^2 - 10X + 2 = (X^2 - 5X + 1) \cdot (X^2 + 2)$

$$= \left(X - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}\right) \cdot \left(X - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}\right) \cdot (X - i\sqrt{2}) \cdot (X + i\sqrt{2})$$

• $X^3 - 2X^2 + X = X \cdot (X^2 - 2X + 1) = X \cdot (X - 1)^2$

17.13. **Kor.:** Sei $p \in \mathbb{C}[z]$. Dann ex. $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = \alpha \prod_{\ell=1}^{r} (z - \alpha_\ell)^{k_\ell}$, dabei heißt k_ℓ die Multiplizität/Vielfachheit der Nullstelle α_ℓ. Es gilt $k_1 + \ldots + k_r = \deg p$.

Es gilt folgender Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung wie in 17.3.2) am Bsp. gezeigt:

17.14. Satz von der Partialbruchzerlegung:

Vor.: $p, q \in \mathbb{C}[z]$, $q(z) = \prod_{\ell=1}^{r} (z - \alpha_\ell)^{k_\ell}$, sei $\deg p < \deg q = n$.

Beh.: $\exists$ eindeutig bestimmte $c_{\ell,j} \in \mathbb{C}$ für $\ell \in \{1, \ldots, r\}$, $j \in \{1, \ldots, k_\ell\}$, mit

$$\boxed{\frac{p}{q}(z) = \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_\ell} \frac{c_{\ell,j}}{(z - \alpha_\ell)^j}.}$$

Bew.: s. Anhang.

17.15. Bsp.: $\frac{5x^2-5x-3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{b}{x+2}$ hat Lösungen für $a_1, a_2, b \in \mathbb{C}$ laut 17.14.
Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert wieder ein Lineares Gleichungssystem dafür, das die Lösung $a_1 = 2,\ a_2 = -1,\ b = 3$ hat.

⌈Check: $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+2} = \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} \cdot \left(\underbrace{2(x-1)(x+2) - (x+2) + 3(x-1)^2}_{} \right)$

$= 2(x^2+x-2) - x - 2 + 3(x^2-2x+1) = 5x^2-5x-3$ ✓⌋

Zum Auffinden von SFen solcher Ausdrücke genügt jetzt die Lösung von folgendem

17.16. Problem: Gesucht ist eine SF zu $\frac{1}{(z-\alpha)^k}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$.

- Falls $k \geq 2$, ist $\frac{1}{1-k}(z-\alpha)^{1-k}$ eine SF.
- Falls $k = 1$: Setze $u = \mathrm{Re}(\alpha)$, $v = \mathrm{Im}(\alpha)$.
  - * Falls $v = 0$, ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{u\}$ dann $\ln|x-u|$ eine SF.
  - * Falls $v \neq 0$, haben wir $\frac{1}{x-\alpha} = \frac{x-\bar{\alpha}}{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})} = \frac{(x-u)+vi}{(x-u)^2+v^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x-u)}{(x-u)^2+v^2} + i \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-u}{v}\right)^2+1}$,
    eine SF davon ist $\frac{1}{2}\ln\left((x-u)^2+v^2\right) + i \arctan\left(\frac{x-u}{v}\right)$.

Man kann in letzterem Fall noch Terme mit SFen zu Paaren von komplex konjugierten Nullstellen des Nenners q weiter zusammenfassen, vgl. [Hoff, 5.1.3] für eine reelle Version.
Mit [Hoff, 5.1.4, 5.1.5] kann man die S.F. weiterer, spezieller algebraischer/transzendenter Fktn. bestimmen.

Anhang

17.17. **Beweis von Satz 17.4 von der Polynomdivision:**

- Existenz von R und S: Klar für $\deg p < \deg q$: dann ist $S = 0$, $R = p$.
  Somit können wir OE $\deg p \geq \deg q$ annehmen.
  Dann führen wir eine vollst. Ind. nach $n = \deg p$:
  Ind.anf.: $n = 0$: Dann ist $p = a_0$, $a_0 \neq 0$, und auch $\deg q = 0$, also $q = b_0 \neq 0$.
  Haben dann $p = a_0 b_0^{-1} \cdot q + 0$.
  Ind.schritt: $\deg P \leq n-1 \rightsquigarrow \deg P = n$: Seien $p = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, $a_n \neq 0$,
  und $q = b_0 + b_1 X + \ldots + b_m X^m$, $b_m \neq 0$,
  und $m \leq n$. Betr. $P_1 := p - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \cdot q$ mit $\deg P_1 < n$. "Echt kleiner n"
  Für $\deg P_1 < \deg q$ folgt nach obigem, für $\deg P_1 \geq \deg q$ folgt nach Induktionsvor., dass $\exists R_1, S_1 \in K[X] : P_1 = S_1 q + R_1$, $\deg R_1 < \deg q$.
  Dann folgt $p = P_1 + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \cdot q = \left(S_1 + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}\right) \cdot q + R_1$ mit $\deg R_1 < \deg q$.
  Also: $S = S_1 + \frac{a_n}{b_m} \cdot X^{n-m}$, $R = R_1$ liefert die Ind.beh.

- Eindeutigkeit: Aus $p = S_1 q + R_1$, $\deg R_1 < \deg q$ und $p = S_2 q + R_2$, $\deg R_2 < \deg q$, folgt durch Differenzenbildung: $R_2 - R_1 = (S_1 - S_2) \cdot q$. Wäre $S_1 - S_2 \neq 0$, folgte mit $\deg q \leq \deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg R_2, \deg R_1)$ ein Widerspruch. Also gilt doch $S_1 = S_2$ und damit auch $R_1 = R_2$. □

17.18. <u>Beweis von Satz 17.14 von der Partialbruchzerlegung:</u>

- Sei $q_{l,j} := \frac{q}{(z-\alpha_l)^j}$, dies sind mit $j \leq k_l$ also $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$ viele Polynome.

- Zeige zunächst: $\overbrace{L(z^0, z^1, \ldots, z^{n-1})}^{n \text{ viele}} \overset{!}{=} L(\overbrace{q_{l,j}}^{\text{auch } n \text{ viele}} ;\ l \in \{1, \ldots, r\}, j \in \{1, \ldots, k_l\})$,
  wo L die Lineare Hülle/Menge aller Linearkombinationen der Elemente sei.

  Da $z^0, z^1, \ldots, z^{n-1}$ lin. unabh., gen. z.z.: die $q_{l,j}$ sind lin. unabh.

  Dazu sei j fest (haben dann $\deg q_{l,j} = n - j$, $j \leq n$), und

  Sei $\sum_{\substack{l=1 \\ j \leq k_l}}^{r} \lambda_l q_{l,j} = 0$, die $\lambda_l \in \mathbb{C}$. Setze $\lambda_l := 0$ für $j > k_l$,
  $j \leq k_l \leftarrow$ Bedingung an l loswerden! schreibe dann $\sum_{l=1}^{r} \lambda_l q_{l,\underset{\uparrow \text{fest}}{j}} = 0$. $\boxed{\times}$

<u>Beh.:</u> $\lambda_l = 0$ für <u>alle</u> $1 \leq l \leq r$.

<u>Bew.</u> (Vollst. Ind. nach n). Ind.anf.: $n = 1$, dann ist $r = 1 = k$, $q_{1,1} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. ✓

Ind.schritt: $n-1 \leadsto n$, wo $n \geq 2$:

1. Fall: $\exists t$ mit $k_t - j \geq 1$, es teilt $z - \alpha_{k_t}$ dann $q_{t,j}$ und damit alle $q_{l,j}$ (für $l \neq t$ sowieso). Teile also die $q_{l,j}$ in $\boxed{\times}$ durch $z - \alpha_{k_t}$, erhalte $\tilde{q}_{l,j}$ mit $\deg \tilde{q}_{l,j} = n - 1$. Laut Ind.vor. ergibt sich $\lambda_l = 0$ für $1 \leq l \leq r$.

2. Fall: Sei also Œ $k_l = j$ für alle l, weiter (indirekt) gelte Œ $\lambda_1 = -1 \neq 0$.
   Dann folgt $\sum_{s=2}^{r} (z - \alpha_s)^j = \sum_{l=2}^{r} \lambda_l \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^{r} (z - \alpha_s)^j$ aus $\boxed{\times}$.
   Setze ein: $z = \alpha_1$,
   dann ist die l.S. $\neq 0$, aber die r.S. $= 0$, ↯. Auch hier ergibt sich $\lambda_l = 0$ für $1 \leq l \leq r$. ⌟

- Wegen $\deg q_{l,j} = n - j$ sind dann alle $q_{l,j}$ lin. unabh.
  d.h. $\exists$ eind. best. $c_{l,j} \in \mathbb{C}$ mit $\frac{p}{q} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_l} \frac{c_{l,j} q_{l,j}}{q} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_l} \frac{c_{l,j}}{(z - \alpha_l)^j}$.

□

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 18: Funktionenfolgen, Potenzreihen

[Hoff, §3.3]

Stichworte: Supremumsnorm, gleichmäßige/punktweise Konvergenz, Majorantenkriterium von Weierstraß, Potenzreihen, Konvergenzradius

---

18.1. **Einleitung:** Wir führen die Supremumsnorm ein und damit die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolge, welche im Vergleich zur punktweisen Konvergenz stärker ist. Potenzreihen werden als Beispiel für Funktionenfolgen auf (gleichmäßige) Konvergenz hin untersucht.

18.2. Sei $\mathcal{I} = [a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathcal{I}, \mathbb{R}) = \{f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{I}) = \{f \in \mathcal{F};\ f$ beschränkt$\}$, $\mathcal{J} := \mathcal{J}(\mathcal{I})$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0(\mathcal{I})$.
Haben: $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ sind Untervektorräume von $\mathcal{F}$.

18.3. **Def.** (Supremumsnorm): Für $f \in \mathcal{B}$ sei $\|f\| := \|f\|_{\sup} := \sup\{|f(t)|;\ t \in \mathcal{I} = [a,b]\}$.

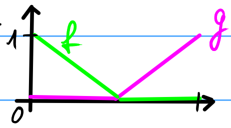
18.4. **Bem.:** $\|\cdot\|$ ist eine Norm, $\|\cdot\| : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, mit

(a) $\|f\| = 0 \iff f = 0$ (definit)
(b) $\alpha \in \mathbb{R}$: $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ (homogen)
(c) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Δ-Ungl.)

} definieren eine "Norm"

(d) $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ (submultiplikativ) ← ist nicht Teil der Def. einer "Norm". diese Eigenschaft erfüllt $\|\cdot\|_{\sup}$ zusätzlich.

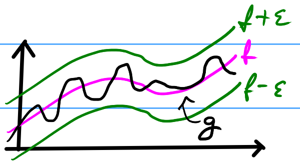
Bsp. für (d):



Hier ist $\|fg\| = 0$, aber $\|f\| = \|g\| = 1$, also $\|f\| \cdot \|g\| = 1$.

18.5. **Bem.:** $\|f - g\| \leq \varepsilon \iff \forall x: |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

Anschaulich: "ε-Schlauch"



18.6. **Def.:** $\forall n$ sei $f, f_n \in \mathcal{B}$.
f_n konvergiert gleichmäßig gegen f (Notation: $f_n \rightrightarrows f$),
falls $\|f_n - f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

18.7. **Bem.:** $f_n \rightrightarrows f \quad \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \quad \forall x \in \mathcal{I}: f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \quad (\iff |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0)$.

Bezeichnung: Punktweise Konvergenz,
Notation: $f_n \xrightarrow{\text{ptw}} f$.

18.8. Bsp.: Sei $I=[0,1]$, $f_n(x)=x^n$, $f(x)=\begin{cases}1, & x=1\\ 0, & x\neq 1\end{cases}$.

Dann: $f_n \xrightarrow{ptw} f$. Aber: $\|f-f_n\|=1$, d.h. $f_n \not\rightrightarrows f$.

Bemerke: alle f_n stetig, aber die punktweise Grenzfunktion f ist unstetig!

18.9. Satz: Vor.: $\forall n$ sei $f, f_n \in \mathcal{B}$, $f_n \rightrightarrows f$.

Beh.: (a) $\forall n$: $f_n \in \mathcal{J} \Rightarrow f \in \mathcal{J}$ und $\int_a^b f_n dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f dt$.

(b) $\forall n$: $f_n \in \mathcal{C} \Rightarrow f \in \mathcal{C}$.

Bew.: (a): Dass $f \in \mathcal{J}$ folgt, liegt nicht auf der Hand; zitieren [Heuser, Satz 104.4] dafür.

Mit $f\in\mathcal{J}$ folgt $|\int_a^b f_n - \int_a^b f| = |\int_a^b (f_n - f)| \le (b-a)\|f_n - f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(b): Sei n fest so, dass $\|f_n - f\| \le \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Dann:

$$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(y)| + |f_n(y)-f(y)|$$
$$\le \|f-f_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_n - f\| \le \varepsilon,$$

wobei für x fest und y mit $|x-y|<\delta$ dabei $|f_n(x)-f_n(y)| \le \frac{\varepsilon}{3}$ sein soll, denn $f_n \in \mathcal{C}$. □

18.10. Beh.: Punktweise Konvergenz als Voraussetzung in 18.9 ist unzureichend!

Bsp. 1: $f_n \in \mathcal{E}$, $f \in \mathcal{B}$, $f_n \xrightarrow{ptw} f \not\Rightarrow f \in \mathcal{J}$:

Es ist $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ abzählbar (da $\mathbb{Q}$ abzählbar, vgl. [Heuser, Satz 19.1]), d.h. haben $A = \{a_j; j \in \mathbb{N}\}$. Dann sei $f(x) = \begin{cases}1, & x \in A,\\ 0, & x \notin A,\end{cases}$ $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, und $f_n(x) := \begin{cases}1, & x \in \{a_1,\dots,a_n\},\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$, $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$. Die f, f_n sind $\in \mathcal{E}$.

Aber: $f \notin \mathcal{J}$.

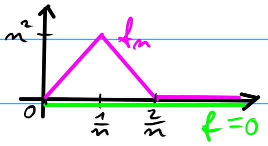
Bsp. 2: $(f_n) \subseteq \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{B}$, $f_n \xrightarrow{ptw} f$, $f_n \not\Rightarrow f \in \mathcal{C}$:

Wähle $\underbrace{f_n = x^n}_{\in\mathcal{C}} \xrightarrow{ptw} f$ mit $f(x) = \begin{cases}1, x=1\\ 0, x \neq 1\end{cases}$, aber $f \notin \mathcal{C}$. (ist 18.8)

Somit ist $\lim\limits_{x\to1-} \lim\limits_{n\to\infty} x^n = \lim\limits_{x\to1-} \overset{=0}{\widetilde{f(x)}} = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to1-} x^n$.

⚠ Zwei Grenzwerte können also nicht beliebig vertauscht werden, falls nur ptw. Kgz. vorliegt!

Bsp. 3: $(f_n) \in \mathcal{J}$, $f \in \mathcal{E}$, $f_n \xrightarrow{ptw} f$, aber $\int_a^b f_n dt \not\xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f dt$.



$f_n \xrightarrow{ptw} f = 0$, aber $\int_0^1 f_n dt = n \not\xrightarrow{n\to\infty} 0 = \int_0^1 f dt$.

Zur gleichmäßigen Konvergenz von Reihen von Funktionen haben wir folgendes

18.11. Majoranten Kriterium von Weierstraß:

Vor.: $\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in \mathcal{B}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \gamma_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$,

wobei $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \|f_n\| \leq \gamma_n$.

Beh.: a) $\forall x \in [a,b] : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) =: f(x)$ ist absolut konvergent,

b) $f \in \mathcal{B}$ und $\|\sum_{j=1}^{m} f_j - f\| \xrightarrow{m \to \infty} 0$. Somit: $\sum_{j=1}^{m} f_j \rightrightarrows f$.

Bew.:

Zu a): Sei OE $n_0 = 1$, d.h. $\forall x \in [a,b] : |f_n(x)| \leq \|f_n\| \leq \gamma_n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Rightarrow$ Beh. laut Majorantenkriterium 7.17.

Zu b): • $|f(x)| \leq \|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ für alle $x \in [a,b]$,

d.h. $f \in \mathcal{B}$.

• $\|\sum_{j=1}^{m} f_j - f\| = \|\sum_{j=m+1}^{\infty} f_j\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \|f_j\| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \gamma_j \xrightarrow{m \to \infty} 0$

nach Cauchykriterium für Reihen 7.10. □

Bsp.: $\sum_{j=0}^{m} x^j \rightrightarrows \frac{1}{1-x}$ für $x \in I = [a,b] \subseteq]-1,1[$.

18.12. Satz: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Vor.: $(f_n) \subseteq \mathcal{C}^1$, $h \in \mathcal{B}$, $\|f_n' - h\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ (d.h. $f_n' \rightrightarrows h$),

$\exists \xi \in [a,b]$ so dass $f_n(\xi) \xrightarrow{n \to \infty} \beta$ existiert.

Beh.: $\exists f \in \mathcal{C}^1,\ f' = h,\ f_n \rightrightarrows f$.

Bew.: Aus Satz 18.9(b) folgt $h \in \mathcal{C} = \mathcal{C}^0$, d.h. $\exists \int_a^b h\,dt$.

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI, Teil 1, Nr. 16.12)

ist $f_n(x) = f_n(\xi) + \int_{\xi}^{x} f_n'\,dt$.

Sei $f(x) := \beta + \int_{\xi}^{x} h\,dt$. Dann ist $f' = h$ und f stetig diff'bar.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(\xi) - \beta| + \left|\int_{\xi}^{x} (f_n' - h)\,dt\right| \\ &\leq |f_n(\xi) - \beta| + |x - \xi| \cdot \|f_n' - h\| \\ &\leq |f_n(\xi) - \beta| + (b-a)\|f_n' - h\| \quad \text{für alle } x \in [a,b],\end{aligned}$$

d.h. es gilt $\|f_n - f\| \leq |f_n(\xi) - \beta| + (b-a) \cdot \|f_n' - h\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$. □

18.13. **Bem.:** f_n diff'bar, $f_n \rightrightarrows f$ impliziert nicht f diff'bar!

Bsp.: $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \rightrightarrows |x| = f(x)$ auf $[-1,1]$, f nicht diff'bar

⌈denn $0 \le f_n(x) - f(x) \le \frac{1}{n}$ für alle $x \in [-1,1]$.⌋

18.14. **Bem.:** f diff'bar impliziert nicht $f_n' \rightrightarrows f'$!

Bsp.: $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$. Dann: $\|f_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$.

Trotzdem: $f_n' = \cos(nx) \not\rightrightarrows 0$.

Zu Potenzreihen: Diese sind wichtige Funktionenfolgen.

Hatten das Wurzelkriterium: Sei $a_n \in \mathbb{C}$, Frage: Wann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ abs. kgt.?

Sei $L := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Hatten: $L < 1 \Rightarrow$ abs. kgz.

$L > 1 \Rightarrow$ div.

18.15. Eine Potenzreihe über $\mathbb{C}$ ist eine Reihe $\underline{\underline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k}}$ für $a, a_k \in \mathbb{C}$ (aufgefasst als Fkt. in $z \in \mathbb{C}$). $\leftarrow$ (Funktionenfolge $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (z-a)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$)

Dann ist $\sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-a|$. Das Wurzelkriterium liefert somit:

1. Fall: $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

2. Fall: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq a$.

Bem.: auch $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, falls dies kgt. ist

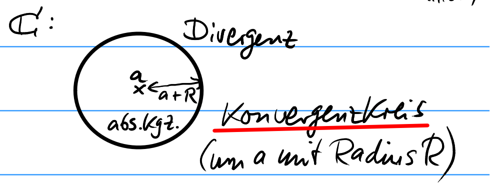
Besonders interessant:

18.16. 3. Fall: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \left]0, \infty\right[$, sei $R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Dann: Divergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ für $|z-a| > R$, ($\leftarrow$ dann ist $\sqrt[n]{|a_n| \cdot |z-a|^n} > \frac{|z-a|}{R} > 1$ (für ∞ vielen)

und absolute Konvergenz für $|z-a| < R$. ($\leftarrow$ " $\sqrt[n]{|a_n| \cdot |z-a|^n} < \frac{|z-a|}{R} < 1$ (für fast allen)

Nennen dann R den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ und $\{z \in \mathbb{C};\ |z-a| < R\}$ heißt Konvergenzkreis.

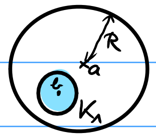


Im Falle reeller Potenzreihen (die $a, a_k, z \in \mathbb{R}$) spricht man von einem Konvergenzintervall (der Länge $2R$, nämlich $\left]a-R, a+R\right[$).

Wir nennen a den Mittelpunkt des Konvergenzkreises/intervalls, bzw. Entwicklungspunkt der Potenzreihe, was mit Kapitel An19 klar wird.

18.17. **Bem.:** Vor.: $R>0$, $0<r<R$, $|a-b|<R$, R der Kgz.radius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$.

sei $K_1 := \{|w-b| \leq r\} \subseteq \{|z-a|<R\}$ ein abgeschlossener Kreis um b mit Radius r.



Beh.: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$ Konvergiert gleichmäßig auf K_1.

Bew.: Sei OE $a=b$, $w \in K_1$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \underbrace{|w-a|}_{\leq r}{}^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z|^k \text{ mit } r<|z|<R,$$

also ist die Potenzreihe glm. kgt. auf K_1 nach 18.11. ☐

18.18. **Satz zur Differenzierbarkeit von Potenzreihen:**

Vor.: $0<R\leq\infty$, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, $|x-a|<R$, $x \in \mathbb{R}$.

Beh.: f ist diff'bar,

und es ist $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n}{x-a} \cdot (x-a)^n$.

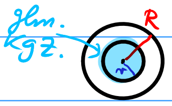
Bew.: Konvergentradius von $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ ist R denn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot \frac{n}{|x-a|}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Für $f_m := \sum_{k=0}^{m} a_k (x-a)^k$ konvergiert $f_m' \xrightarrow{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1} =: h$

gleichmäßig für $|x| \leq r < R$ laut 18.17.

Nach Satz 18.12: f_m (a) kgt. $\Rightarrow \exists f$, $f'=h$, $f_m \Rightarrow f$ (auf $|x| \leq r$) ☐

18.19. **Bem. zur gleichmäßigen Konvergenz:**



- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ Kgt. nicht glm. auf $|z-a|<R$, aber:
- Falls $r<R$, so kgt. die Reihe glm. auf $|z-a|<r$ ("lokal glm. kgt.")

Offenes Problem: "Rand"fall $|z-a|=R$.

Sei $0<R<\infty$, OE $a=0$.

im $\mathbb{R}$-Bsp.: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R=1$, div. für $x=\pm 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $R=1$, div. für $x=1$, kgt. für $x=-1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $R=1$, Kgt. für $x=\pm 1$.

→ Auf dem Kreisrand kann Kgz./Div. eintreten und muss gesondert untersucht werden.

Vorlesung Analysis I — WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An 19: Taylorreihen

[Hoff, §6.2]

Stichworte: Satz von Taylor, 1. MWS der ∫-Rechnung, Lagrange-Restglied, Potenzreihenentwicklungen in Beispielen

---

19.1. Einleitung: Manche Funktionen lassen sich als Potenzreihe darstellen. Wie man eine solche Potenzreihendarstellung finden kann, liefert der Satz von Taylor zur Entwicklung von Funktionen in eine Potenzreihe. Wie gut die Approximation mit den ersten n Gliedern der Potenzreihe ist, besagen Abschätzungen des zugehörigen Restglieds.

19.2. Situation: Sei $a \in I \subseteq \mathbb{R}$, I ein echtes IV, $n \in \mathbb{N}_0$.

Def. $\mathcal{C}^n(I) := \{ f : I \to \mathbb{R};\ f$ n-mal diff'bar, $f^{(n)}$ stetig$\}$ als die Menge der n-mal stetig diff'baren Funktionen auf I.

19.3. Satz (von Taylor / Taylorreihenentwicklungssatz / Taylorformel):
Sei $a \in I \subseteq \mathbb{R}$, I echtes IV.
Sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Dann gilt $\forall x \in I$:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \cdot \frac{(x-a)^k}{k!}}_{=: P_n(x) = P_n(x;a)} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}_{=: R_n(x) = R_n(x;a)}}$$

Dabei heißt $P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ das n-te Taylorpolynom
und $R_n(x)$ das n-te Restglied
in der Taylorentwicklung / Potenzreihenentwicklung von f im Punkte a.
Man nennt a den Entwicklungspunkt der Taylorentwicklung.

19.4. Bem.: Mit dem Taylorpolynom P_n erhoffen wir eine gute Approximation an $f(x)$, die sich gut numerisch durchführen lässt. Die zugehörige Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$ heißt Taylorreihe, s. Def. 19.9.

19.5. **Bew.** (durch vollst. Ind. über n):

Ind. anfang $n=0$: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ ist genau der Hauptsatz 16.12.

Ind. schritt $n-1 \rightsquigarrow n$: $R_{n-1}(x) = \int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{u'} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{v}\,dt$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{partiell}\\ \text{integrieren}}}{=} -\frac{(x-t)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(t)\Big|_a^x + \int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{u} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v'}\,dt$$

$$= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x).$$

Einsetzen dieser Formel in die Induktionsvor. ergibt die Induktionsbeh. □

19.6. **Zusatz zum Taylor-Satz:** Für $m \in \mathbb{N}_0$, $m \le n$, gilt $P_n^{(m)}(a) = f^{(m)}(a)$.

Bew.: $$\left(\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\cdot\frac{(x-a)^k}{k!}\right)^{(m)}\Big|_{x=a} = \underbrace{m!\cdot\frac{f^{(m)}(a)}{m!}}_{\text{von Term mit } k=m} + 0 = f^{(m)}(a).$$ □

19.7. **Kor. zum Taylor-Satz:** $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, $f^{(n+1)} = 0$ (konstant 0 auf I) $\Rightarrow f$ ist Polynom, $\deg f \le n$.

[Setze $f^{(n+1)} = 0$ in Taylorformel ein.]

Erinnern an
den **1. Mittelwertsatz der Integralrechnung** (s. 15.28):

Vor.: $-\infty < a < b < \infty$, $f, g \in \mathcal{J}(\underbrace{[a,b]}_{\text{als } I})$, $g \ge 0$ (oder $g \le 0$).

Beh.: a) $\exists \mu \in [\inf f, \sup f]$: $\int_a^b fg\,dt = \mu \int_a^b g\,dt$.

b) Falls f stetig ist, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $\mu = f(\xi)$.

Erhalten damit eine Formel für das

19.8. **Restglied nach Lagrange:**

$\forall x \in I\ \exists \xi \in \,]a,x[$ (bzw. $]x,a[$) mit $R_n(x;a) = f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Bew.: Sei OE $x > a$.

Dann ist $R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\cdot\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

laut MWS der $\int$-Rg. 15.28. □

Kor.: In 19.8 ist $R_n(x;a) = \eta(x)\cdot(x-a)^n$ mit einer Fkt. $\eta(x) \xrightarrow{x\to a} 0$. (Nämlich $\eta(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(\underset{\xi=\xi(x)}{\xi}) - f^{(n+1)}(a)\right)$.)

19.9. **Def.:** Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(I) := \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{C}^n(I) \subseteq \mathcal{F}(I)$.

Dann heißt
$$T(f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \cdot \frac{(x-a)^k}{k!}$$
die Taylorreihe von f in a.

19.10. **Bem.:** 1. Für $x \in I$ ist die Taylorreihe in x nicht notwendig konvergent.

2. Wenn die Taylorreihe konvergent in x ist, dann nicht notwendig gegen $f(x)$.

Standardbsp.: Zu 1.: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos(k^2 x)$ ist nur in $x=0$ Taylor-kgt. ⌜ohne Bew.⌟

Zu 2.:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases} \quad \text{Dann: } T(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0 \neq f(x).$$

19.11. **Bem.:** Für $x \in I$ gilt: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a) \cdot \frac{(x-a)^k}{k!} \iff R_n(x;a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

19.12. **Satz:** Für eine Potenzreihe $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ gilt $f^{(n)}(a) = n! c_n$ für alle $n \geq 0$.

Bew.: $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}$, $f''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) c_k (x-a)^{k-2}, \ldots \overset{\text{Vollst.}}{\underset{\text{Ind.}}{\leadsto}} f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) c_k (x-a)^{k-n}$,

also $f^{(n)}(a) = n! c_n$ (nur Term mit $k=n$ bleibt). □

19.13. **Kor.:**

a) Um einen festen Entwicklungspunkt a gibt es für eine Fkt. höchstens eine Potenzreihenentwicklung.

b) Für $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ gilt $T(f) = f$. ⌜Speziell wenn f Polynom.⌟

nahe 0 gute Appr.!
$$\underbrace{P_0 = 1,\ P_2 = 1 - \frac{t^2}{2},\ P_3 = P_2 + \frac{t^4}{4!}}\ \ldots$$

19.14. **Bsp.:** (a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (b) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (c) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(d) $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$ (= t + höhere Potenzen in t), wo $t \in]-1,1[$,

bzw. $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \left(= -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \ldots\right)$.

(e)
$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+t) - \ln(1-t)\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} - (-1)^{n-1} \frac{(-t)^n}{n} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} \left(1 - (-1)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \text{ wo } t \in]-1,1[.$$

(f) $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ für $t \in]-1,1[$,

denn $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \arctan'$. ⌜vgl. 18.18.⌟

(g) $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

(h) Für $x \in]-1,1[$ ist $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n$ in jedem abgeschlossenen Teil-IV von $]-1,1[$ glm. kgt.

$$\Rightarrow \arcsin(x) = \int_0^x \arcsin'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

19.15. **Approximation von $\ln(2)$:** • In (d) ist $t=1$ möglich laut Abelschem GW Satz [Heuser, §65].

• In (d) mit $t=1$ erhält man aber eine schlechte/langsame Appr. an $\ln(2)$:

Nach $n=10^6$ Summanden wird $\frac{1}{10^6}$ addiert, d.h. 10^{-6} ist Fehler/Restabschätzung.

• In (e) mit $t=\frac{1}{3}$ erhält man eine gute/schnelle Appr. an $\ln(2)$:

$\ln(2)=\ln\left(\frac{1+1/3}{1-1/3}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^7+\dots\right)$, die ersten 6 Summanden haben einen Rest $\leq\frac{2}{13}\sum_{\nu=6}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2\nu+1}=\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}\cdot\frac{9}{8}=\frac{1}{52}\cdot\frac{1}{3^{11}}<1.1\cdot10^{-7}$.

19.20. **Def.:** Die binomische Reihe ist $(1+x)^\alpha\overset{!}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in\,]-1,1[$,

diese Reihe ist abbrechend für $\alpha\in\mathbb{N}$ laut binomischen Satz in 2.19.

Bew.: • Sei OE $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, $x\neq0$, $a_n:=\binom{\alpha}{n}:=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)$ für $n\in\mathbb{N}_0$ (vgl. 2.17).

Dann ist $a_n>0$ und $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

• Ferner gilt: $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\liminf\sqrt[n]{a_n}\leq\limsup\sqrt[n]{a_n}\leq\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}$. ⓤ

Mit $|a_n|=\left|\binom{\alpha}{n}\right|=\frac{1}{n!}|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|$ ist

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\xrightarrow{n\to\infty}1$, mit 18.16. folgt somit für den Konvergenzradius $R=1$.

• Sei nun also $g:=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ für $|x|<1$.

Beh.: $(1+x)g'=\alpha g$.

⌜**Bew.:**

$$(1+x)g'=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}n\,x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}n\,x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}n\,x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n+1}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}n\,x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\binom{\alpha}{n+1}(n+1)+n\binom{\alpha}{n}\right)x^n$$
$$\overset{!}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n=\alpha g,$$

denn
$$\binom{\alpha}{n+1}(n+1)+n\binom{\alpha}{n}=\frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots\underline{(\alpha-n)}+\underline{n}\cdot\frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$$
$$=\frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\underline{\alpha-n}+\underline{n})=\binom{\alpha}{n}\underline{\alpha}.\quad\square$$ ⌟

• Sei nun $h:=\frac{g}{(1+x)^\alpha}$, $h'=\frac{(1+x)^\alpha g'-g\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha}}=(1+x)^{(\alpha-1)-\alpha}\big(\underbrace{(1+x)g'-g\alpha}_{=0}\big)=0$.

Also ist $h=c\in\mathbb{R}$ und $g(x)=c(1+x)^\alpha$, wo $c=g(0)=1$,

also ist $g(x)=(1+x)^\alpha$ ⇝ "$\overset{!}{=}$" ist bewiesen. $\square$

19.21. **Spezialfall der binomischen Reihe:** $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+$ Terme höherer Ordnung,

als Anwendung erhält man zur Berechnung von $\sqrt{2}=\sqrt{\frac{49}{49}\cdot\frac{100}{50}}=\frac{10}{7}\sqrt{1-\frac{2}{100}}$

den numerischen Wert $\sqrt{2}\approx\frac{10}{7}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{100}-\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{100^2}\right)=\frac{10}{7}\cdot\left(1-\frac{1}{100}-\frac{1/2}{10\,000}\right)$.

19.22. **Bsp.:** GWberechn.: $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\ln(1+t)\underset{\substack{\uparrow\\ 19.14(d)}}{=}\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\cdot\left(t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-+\dots\right)=\lim_{t\to0}(1\underbrace{+\dots}_{\to0})=1$.

schneller/besser ohne de l'Hopital!

Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

An20: Uneigentliche Integrale

Stichworte: uneigentliches Integral, Integrierbarkeitskriterien, Integralkriterium für Reihenkonvergenz, Abschätzung der harmonischen Reihe

---

20.1. **Einleitung:** bisher wurden nur beschränkte Integranden zur Integration betrachtet. Wir wollen nun auch unbeschränkte Integranden und sogar unbeschränkte Integrationsintervalle zulassen. Man spricht dann von uneigentlichen Integralen; diese können existieren oder nicht. Bestimmte Konvergenzkriterien liefern die Existenz. [Hoff, §53]

20.2. **Beispiele:** a) Was ist $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$? Haben $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$, also $\sqrt{1-x^2} \notin \mathcal{R}([0,1])$.

Trotzdem gilt für $0<a<1$, dass $\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(a) \xrightarrow{a\to 1} \frac{\pi}{2}$, also $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \overset{!}{=} \frac{\pi}{2}$.

b) Was ist $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, wo $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{R}([0,\infty[)$ mit unbeschr. Integrations IV.

Es gilt $\int_0^T \frac{dx}{1+x^2} = \arctan T \xrightarrow{T\to\infty} \frac{\pi}{2}$, also $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \overset{!}{=} \frac{\pi}{2}$.

c) $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}dx \geq -\ln(\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} +\infty$, d.h. $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ ex. nicht!

Erklären also: $\int_0^1 \dots = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \dots$ bzw. $\int_0^\infty \dots = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \dots$, falls ex.

20.3. **Def.:** Sei $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $a<b$, $f:[a,b[\to\mathbb{R}$, f sei int'bar auf jedem $[a,c]$ mit $a<c<b$. Ist dann f in $[a,b[$ unbeschränkt (oder $b=\infty$), so heißt $\int_a^b f(t)dt$ ein (an der oberen Grenze) uneigentliches Integral.

- Falls $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(t)dt$ existiert, so sagt man, das uneigentliche Integral existiert bzw. man nennt f im IV $[a,b]$ (uneigentlich) integrierbar und definiert dann $\int_a^b f(t)dt := \lim_{c\to b-} \int_a^c f(t)dt$.
- Andernfalls sagt man, das uneigentliche Integral divergiert.
- Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)dt$ heißt absolut konvergent, wenn $\int_a^b |f(t)|dt$ existiert.
- Alles analog/entsprechend für Integrale, die an der unteren Grenze uneigentlich sind.

20.4. **Bem.:** Absolut konvergente uneigentliche Integrale sind konvergent, wir haben $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

20.5. **Bem.:** • Integrale können auch an beiden Grenzen uneigentlich sein, diese zerlegt man in zwei einseitig uneigentliche: wähle $a < c < b$ und def. $\int_a^b f(t)dt$ Kgt. $:\Leftrightarrow \int_a^c$ und $\int_c^b$ ex., dann $\int_a^b f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

• Integrale, die im Innern uneigentlich sind, werden ebenfalls in zwei einseitig uneigentliche zerlegt: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in allen IVen $[a,c[\,,\ ]d,b]$ mit $a<c<x_0<d<b$ int'bar, so def. $\int_a^b f(t)dt := \lim\limits_{c\to x_0-}\int_a^c f(t)dt + \lim\limits_{d\to x_0+}\int_d^b f(t)dt$, falls diese GWe ex., ansonsten heißt auch hier das $\int$ divergent.

20.6. **Bsp.:** 1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta}$ Kgt. $\Leftrightarrow \beta > 1$ $\ulcorner \int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta} = \lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t x^{-\beta}dx \underset{\beta\neq 1}{=} \lim\limits_{t\to\infty} \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}\Big|_1^t = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{\beta-1}}}.\lrcorner$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ Kgt. $\Leftrightarrow \alpha < 1$ $\ulcorner$Kritische Stelle: $x=0$; analog $\lrcorner$

3) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ Kgt., nicht abs. Kgt.

4) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

5) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

} hier ohne Beweis, s. später in Vorlesung zur Funktionentheorie, Stichwort: "Gammafunktion"

20.7. **Rechenregeln für uneigentliche Integrale** (da diese GWe "normaler" Integrale sind):

1) Linearität: $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}$ (uneigentlich) int'bar, $\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \alpha f+g$ (uneig.) int'bar, und $\int_a^b(\lambda f+g)(t)dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

2) Hauptsatz: $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ in jedem $[a,c]$, $a<c<b$, int'bar, F sei S.F. von f und $\lim\limits_{x\to b-}F(x) =: F(b-)$ existiere. Dann ist f in $[a,b[$ int'bar und $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to b-}F(x) - F(a) = F(b-) - F(a)$.

3) Partielle Integration: Seien $u,v:[a,b[\to\mathbb{R}$ stetig diff'bar, $\lim\limits_{x\to b-}u(x)v(x)$ ex. Konvergiert $\int_a^b u(t)v'(t)dt$, so ist auch $u'v$ in $[a,b]$ int'bar, und es gilt
$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \lim_{x\to b-}\left(u(x)v(x) - u(a)v(a)\right) - \int_a^b u'(t)v(t)dt.$$

4) Substitutionsregel: Sei $\varphi:[a,b[\to[\alpha,\beta[$ stetig diff'bar, streng isoton und bijektiv (insb. $\alpha=\varphi(a)$, $\beta=\lim\limits_{x\to b-}\varphi(x)$). Dann gilt $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, d.h. falls eines der beiden Integrale ex., dann auch das andere, und ihre Werte sind gleich.

Neben dem Konvergenzkriterium 20.4 gibt es noch weitere, die sich aus entsprechenden Kriterien für Grenzwerte ergeben, hier einige davon (in 20.8–20.10):

20.8. Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale: Sei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$, $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, f int'bar in allen $[a,c[$, $a < c < b$. Dann ex. $\int_a^b f(t)dt$ genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists c \in [a,b[\; \forall x,y \in [c,b[: \; \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon$.

Bew.: Folgt mit $g(z) := \int_a^z f(t)dt$ sofort aus dem Cauchy-Kriterium 5.19/6.9 für GWe. □

20.9. Monotoniekriterium für uneigentliche Integrale: Sei $f : [a,b[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ nichtnegativ $(a < b \leq \infty)$, f int'bar in allen $[a,c]$, $a < c < b$. Dann ex. $\int_a^b f(t)dt$ genau dann, wenn die Integrale $\int_a^c f(t)dt$ für $a \leq c \leq b$ beschränkt sind. ⌜Die Kgz. ist absolut.⌟

20.10. Vergleichskriterien: Sei $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$, $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$, f,g int'bar in allen $[a,c[$, $a < c < b$.

(a) Majorantenkriterium: Ist $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b[$ und ex. $\int_a^b g(t)dt$, dann ist $\int_a^b f(t)dt$ absolut konvergent.

(b) Minorantenkriterium: Ist $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b[$ und div. $\int_a^b f(t)dt$, dann ist $\int_a^b g(t)dt$ ebenfalls divergent.

Nützlich ist noch das

20.11. Integralkriterium für Reihenkonvergenz: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe, $(a_n) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$, und $f : [1,\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine antitone Funktion mit $a_n = f(n)$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergent.}$$

Im Falle der Konvergenz gilt: $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Bew.: Da f antiton, gilt $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ für $n \leq x \leq n+1$,

also $f(n+1) = \int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx = f(n)$,

also $\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$, d.h. $\sum_{n=2}^{N} f(n) \underset{②}{\leq} \int_1^N f(x)dx \underset{①}{\leq} \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$.

„$\Rightarrow$“: Laut ① ist $\int_1^t f(x)dx$ beschr. Da $f \geq 0$ ist $\int_1^t f(x)dx$ isoton in $t \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ ex.

„$\Leftarrow$“: Es sei $C := \int_1^{\infty} f(x)dx$, mit ② folgt $\underbrace{\sum_{n=2}^{N} f(n)}_{\text{isoton in } \mathbb{N}, \text{ da } f(n) \geq 0} \leq C \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ ex. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ex.

□

20.12. **Bsp.:** (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ ist div. für $\alpha \leq 1$ und Kgt. für $\alpha > 1$. ⌜20.11 mit $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ und Bsp. 20.6 (1), (2).⌟

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}}$ ist div. für $\alpha \leq 1$ und Kgt. für $\alpha > 1$. ⌜20.11 mit $f(x) = \frac{1}{x \ln^{\alpha}(x)}$, Subst. $x(u) = e^{u}$⌟

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) (\ln(\ln(n)))^{\alpha}}$ ist div. für $\alpha \leq 1$ und Kgt. für $\alpha > 1$ usw.

20.12. **Bsp.:** Abschätzung der harmonischen Reihe: Für $N \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + R$, $\frac{1}{N} \leq R \leq 1$.

Bew.: Laut Bew. von 20.11. (①, ②) folgt mit $f(x) = \frac{1}{x}$, dass

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq \overbrace{\int_1^N \frac{1}{x} dx}^{= \ln N} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}, \quad \text{wo die l.S.} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 1, \text{ und die r.S.} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

Dies zeigt $\ln(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - R$ mit $\frac{1}{N} \leq R \leq 1$.

$\ulcorner -1 \leq -R \leq -\frac{1}{N} \lrcorner$ $\square$

Bem.: Der Grenzwert $\gamma := \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) \right)$ existiert und heißt Euler-Mascheroni-Konstante.

Es ist $\gamma = 0.5772\ldots$ Bis heute ist unbekannt, ob $\gamma \in \mathbb{Q}$ ist oder nicht.

Bew. der Ex.: Haben

$$\ln(N) = \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)}_{= \ln \frac{n+1}{n}} = \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \overset{\uparrow}{=} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - R\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$\ln(1+x) = x - R(x)$ mit $|R(x)| \leq \frac{x^2}{2}$.

$\ulcorner$ Lagrange-Restglied 19.8 bei $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 1$, $a = 0$: $-R(x) = R_1(x; 0) = f''(\xi) \cdot \frac{x^2}{2}$, $0 < \xi < 1$

$\rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $\rightsquigarrow$ $f''(0) = -1$ $\rightsquigarrow |f''(\xi)| \leq 1$

$\left(f''(1) = -\frac{1}{4}\right)$ $\lrcorner$

wo $\left| \sum_{n=1}^{N} R\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ kgt. für $N \to \infty$, also ex. $\lim_{N \to \infty} \left(\ln(N) - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) = -\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N-1} R\left(\frac{1}{n}\right)$. $\square$

Ende der Vorlesung
Analysis I