Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung Analysis I

WiSe'24/'25 hhu
K. Halupczok

Literatur:

- Hier und im gesamten Skript steht [Hoff] für das Buch
  Dieter Hoffmann: Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure,
  s. auch die Literaturangaben auf der Webseite der Vorlesung zur Analysis I.
  In diesem Buch finden Sie bestimmte Skriptteile ausführlicher aufgeschrieben.
- Ausführlicheres zu eher speziellen Themen der Analysis steht in: H. Heuser, Lehrbuch der Analysis.

Kapitel:

An1: Mathematische Grundlagen

[Hoff], Kapitel 1.1 – 1.3 und 1.5 auf S. 30–33.

Stichworte: Mengen, Aussagen, Quantoren, Abbildungen, vollständige Induktion

Beschreibung: Wir stellen die grundlegensten Begriffe der Mathematik dar, die aus der Aussagenlogik und naiven Mengenlehre stammen. Wir führen Abbildungen und ihre wichtigsten Eigenschaften ein, und erklären das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

An2: Die reellen Zahlen

[Hoff], S. 33–38, § 1.4.1 – 1.4.3.

Stichworte: Körperaxiome, Anordnung/positive Zahlen, Rechenregeln für Ungleichungen, Beträge, rekursive Definitionen, Σ/Π-Zeichen, $n!$, a^n, Bernoulli-Ungleichung, Binomialkoeffizienten, binomischer Satz

Beschreibung: Wir führen die reellen Zahlen axiomatisch ein. Die grundlegendsten Rechenregeln werden aus den Axiomen hergeleitet, speziell für Ungleichungen, die für die Analysis eine besondere Rolle spielen. Abkürzungen für besondere reelle Zahlen werden eingeführt, wie z.B. Summen/Produkte/Potenzen, Fakultäten und die Binomialkoeffizienten, für die der binomische Satz gilt.

An3: Rationale und irrationale Zahlen [Hoff] §1.6–1.8

Stichworte: rationale Zahlen $\mathbb{Q}$, Vollständigkeit/Archimedes-Eigenschaft, Wohlordnungssatz, Satz von der n-ten Wurzel, geometrische Summe, Dezimalbruchdarstellung

Beschreibung: Wir definieren die reellen Zahlen und die Begriffe im Vollständigkeitsaxiom (V). Die Archimedes-Eigenschaft folgt aus (V), und liefert etwa den Wohlordnungssatz. Demnach liegt $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, und wir können die n-te Wurzel einer Zahl definieren. Weiter kann man reelle Zahlen als Dezimalbruch darstellen; zum Beweis wird die Formel von der geometrischen Summe benötigt.

An4: Komplexe Zahlen [Hoff, §1.9]

Stichworte: Konstruktion, imaginäre Einheit, Rechenregeln, komplex Konjugiertes, Betrag, beschränkte Menge, komplexe Ebene, Real- und Imaginärteile

Beschreibung: Wir führen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Paare reeller Zahlen ein. Mit der richtigen Definition für + und · ist $\mathbb{C}$ ein (kommutativer) Körper, in dem die Gleichung $x^2 = -1$ zwei Lösungen hat. Wir erweitern so den Körper der reellen Zahlen. Die wichtigsten Rechenregeln für $\mathbb{C}$ werden notiert.

An5: Folgen [Hoff, §3.1.1–3]

Stichworte: Folgen, beschränkte Folgen, Nullfolgen, Konvergenz/Divergenz, Monotonie, Cauchy-Folgen, Grenzwertsätze / Sandwichlemma

Beschreibung: Wir behandeln reell- oder komplexwertige Folgen. Über beschränkte Folgen und Nullfolgen gelangen wir zum Konvergenzbegriff.

An6: Teilfolgen, Eigenschaften von Folgen [Hoff, §3.1.4/5]

Stichworte: Teilfolgen, Bolzano-Weierstraß, Vollständigkeitssatz, bestimmte Divergenz, Häufungswerte, limsup und liminf

Beschreibung: Die Untersuchung konvergenter Teilfolgen von u.U. divergenten Folgen führt zum Satz von Bolzano-Weierstraß. Wir erhalten, dass $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ vollständig ist in dem Sinne, dass jede Cauchyfolge konvergiert. Wir diskutieren auch bestimmte Divergenz, den Limes superior und Limes inferior.

An7: Reihen [Hoff, §3.2]

Stichworte: Reihen-Konvergenzsätze, Cauchy-Kriterium, alternierende Reihen/Leibniz-Kriterium, Majoranten-/Wurzel-/Quotienten-Kriterium, Umordnungssatz, Cauchy-Produktsatz

Beschreibung: Reihen sind spezielle Folgen, die aus einer "Summanden"folge gebildet werden. Wir behandeln verschiedene Kriterien zu ihrer Konvergenz. Der Cauchy-Produktsatz besagt, wie das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen gebildet wird.

An8: Die Funktionen exp, cos, sin, Teil I [Hoff, §3.3.2, S. 134-6]

Stichworte: Exponentialreihe, Winkelfunktionen, Eigenschaften, Zahl e, Funktionen sin/cos, Additionstheoreme

Beschreibung: Wir tragen die wichtigsten Eigenschaften der (komplexen) Exponentialfunktion zusammen. Die Funktionen, die als Real- und Imaginärteil davon erklärt werden, sind die Winkelfunktionen Cosinus und Sinus. Sie gelten als Prototyp für die Beschreibung von Schwingungen und haben etliche Eigenschaften, z.B. die Additionstheoreme.

An9: Stetigkeit [Hoff, §2.1, 3.4.2]

Stichworte: Intervalle, Stetigkeit, Folgenkriterium, Stetigkeitssätze, Polynome und rationale Funktionen, Eigenschaften stetiger Funktionen, Zwischenwertsatz, Satz vom Minimum/Maximum

Beschreibung: Wir definieren Intervalle und untersuchen Grundeigenschaften reeller Funktionen. Dies führt uns auf den Stetigkeitsbegriff und deren Eigenschaften, etwa dass stetige Funktionen Intervalle auf Intervalle abbilden – eine Folgerung des ZWS.

An10: Funktionsgrenzwerte [Hoff, §3.4.1, §4.8]

Stichworte: Grenzwert einer Funktion, Links-/Rechtsseitiger Limes, gleichmäßige Stetigkeit, Satz über Umkehrfunktionen, Logarithmus

Beschreibung: Für einen Häufungspunkt a im Definitionsbereich einer Funktion f definieren wir den Funktionsgrenzwert von $f(x)$ für $x \to a$. Mit der zusätzlichen Bedingung $x > a$ ist dies der rechtsseitige Limes, für $x < a$ der linksseitige. Bestimmte Divergenz kann entsprechend definiert werden. Weiter führen wir den Logarithmus ein.

An11: Differenzierbarkeit [Hoff, §4.1–§4.3]

Stichworte: differenzierbar, Kriterien für Diff'barkeit, Tangenten, Ableitungsregeln, höhere Ableitungen

---

An12: Reelle Differenzierbarkeit [Hoff, §4.4, §4.8, §4.11, §6.3]

Stichworte: Umkehrfunktionen ableiten, lokales Min/Max/Extremum, Satz von Rolle, verallgemeinerter MWS, Monotoniekriterien, Satz von Darboux, Regel(n) von de l'Hôpital

Beschreibung: Wir zeigen einen Satz zur Ableitung von reellen Umkehrfunktionen. Die Zusammenhänge zwischen Extremwerte/Monotonie und Ableitung(svorzeichen) erschließen sich. Es folgt der Satz von Rolle, der Mittelwertsatz, und ein Satz von Darboux. Zuletzt behandeln wir die Regel(n) von de l'Hôpital.

An13: Extremwertsuche, Konvexität [Hoff, §4.11.1/2]

Stichworte: hinreichende Bedingungen für lokale Extrema und Vorzeichen der ersten und zweiten Ableitung, Konvexität und Isotonie der Ableitung, Jensensche Ungleichung

Beschreibung: Wir besprechen Anwendungen der zweiten Ableitung: das sind hinreichende Kriterien zur Extremwertsuche bei reellen Funktionen sowie ein Kriterium zur Überprüfung der Konvexität / Konkavität einer reellen Funktion.

An14: Spezielle Winkelfunktionen, exp/cos/sin Teil II

Stichworte: Kreiszahl π, Winkelberechnung, tan, arctan, cotan, arccot, hyperbolische Funktionen, Polarkoordinatendarstellung [Hoff, §4.8, 4.12]

Beschreibung: Wir def. $\frac{\pi}{2}$ als die kleinste positive Nullstelle der reellen Cosinusfunktion. Winkel werden im Bogenmaß gemessen, und π entspricht dem Halbkreiswinkel. Wir behandeln noch weitere, spezielle Winkelfunktionen und hyperbolische Funktionen.

An15: Das Riemann-Integral [Hoff, §5.2.1/2]

Stichworte: Unterteilung, Treppenfunktion, (Riemann-) Integrierbarkeit, Kriterien, Eigenschaften integrierbarer Fktn. und des (bestimmten) Integrals

Beschreibung: Ausgehend von der Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken als Produkt der Seitenlängen soll eine Methode zur Berechnung des Flächeninhalts allgemeinerer (insbesonderer krummlinig begrenzter) Flächen wie z.B. der Kreis gewonnen werden. Als Methode dient die Ausschöpfung von innen und außen durch endlich viele (nichtüberlappende) Rechtecke.

An16: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

[Hoff §5.2]

Stichworte: Stammfunktionen, partielle Integration, Substitutionsregel, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), Integralfunktionen, Integraltafel, Hauptsatzkantate

Beschreibung: Wir betrachten Stammfunktionen und leiten Rechenregeln dafür her. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) liefert die Verbindung zwischen Stammfunktionen (den unbestimmten Integralen) und den Riemann-Integralen (den bestimmten Integralen), und damit erhalten wir einfachere Möglichkeiten zur konkreten Berechnung bestimmter Integrale (als im vorigen Kapitel).

An17: Stammfunktionen rationaler Funktionen

Stichworte: Stammfunktionen rationaler Funktionen, Polynomdivision, Nullstellenabspaltung, Hauptsatz der Algebra, Partialbruchzerlegung

Beschreibung: Wir beschreiben eine Methode zur Auffindung von Stammfunktionen rationaler Funktionen der Form $\frac{p}{q}$ mit Polynomen $p, q \in \mathbb{C}[z]$. Nach Polynomdivision genügt es, den Fall $\deg p < \deg q$ zu betrachten. Dann wird q als Produkt von Linearfaktoren geschrieben, nach einer Partialbruchzerlegung wird die S.F. gefunden.

An18: Funktionenfolgen, Potenzreihen

[Hoff, §3.3]

Stichworte: Supremumsnorm, gleichmäßige/punktweise Konvergenz, Majorantenkriterium von Weierstraß, Potenzreihen, Konvergenzradius

Beschreibung: Wir führen die Supremumsnorm ein und damit die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolge, welche im Vergleich zur punktweisen Konvergenz stärker ist. Potenzreihen werden als Beispiel für Funktionenfolgen auf (gleichmäßige) Konvergenz hin untersucht.

An 19: Taylorreihen [Hoff, §6.2]

Stichworte: Satz von Taylor, 1. MWS der $\int$-Rechnung, Lagrange-Restglied, Potenzreihenentwicklungen in Beispielen

Beschreibung: Manche Funktionen lassen sich als Potenzreihe darstellen. Wie man eine solche Potenzreihendarstellung finden kann, liefert der Satz von Taylor zur Entwicklung von Funktionen in eine Potenzreihe. Wie gut die Approximation mit den ersten n Gliedern der Potenzreihe ist, besagen Abschätzungen des zugehörigen Restglieds.

An 20: Uneigentliche Integrale [Hoff, §5.3]

Stichworte: uneigentliches Integral, Integrierbarkeitskriterien, Integralkriterium für Reihenkonvergenz, Abschätzung der harmonischen Reihe

Beschreibung: bisher wurden nur beschränkte Integranden zur Integration betrachtet. Wir wollen nun auch unbeschränkte Integranden und sogar unbeschränkte Integrationsintervalle zulassen. Man spricht dann von uneigentlichen Integralen; diese können existieren oder nicht. Bestimmte Konvergenzkriterien liefern die Existenz.
