Tutorium zur Analysis I, 6.12.24

Zu Kapitel An10: Häufungspunkte / Funktionsgrenzwerte
(glm) Stetigkeitsbeweise (An9)

✓ 1) $\lim_{x\to 1} f(x) = \ldots$?

✓ 2) einseitige GW:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \ldots ?$$

✓ 3) Stetigkeitsbeweise bei konkreten Fkt.

✓ 4) Glm. Stetigkeiten

✓ 5) Häufungspunkt $\leftrightarrow$ Häufungswerte

---

da Fkt. stetig

Zu 1): • $\lim_{x\to 1}\Big(\underbrace{\sqrt{\ln(x+1)-\sqrt{x}+3x^2}-1+x-e^x}_{\text{Stetigkeit } \rightsquigarrow}\Big) = \sqrt{\ln(2)-1+3}-1+1-e^1$

$= \sqrt{\ln(2)+2}-e$

• $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\underbrace{x-1}_{\to \text{Def.lücke bei } x=1}} =$ "$\frac{0}{0}$"

$f(x) = \frac{e^x - e}{x-1}$, ist stetig in $x=1$?

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty \qquad ?$$

"$\frac{0}{0}$"

• $\lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{x^2-1 \;(\to 0)}{x-1 \;(\to 0)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ \boxed{x\neq 1}}} \frac{(x+1)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}\underbrace{(x+1)}_{\text{stetig}} = 1+1 = 2.$

$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = \underline{\underline{+\infty}}$, $\quad \lim_{x\to 1-} \frac{-1}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{1-x} = \underline{\underline{-\infty}}$

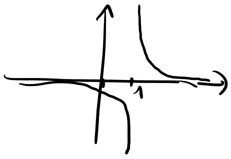
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \;(\to\infty)}{e^x \;(\to\infty)} = 0$ $\rightsquigarrow$ Bedeutung: e^x wächst schneller gegen $+\infty$ als x^2 (haben $x\to\infty$)

"polynomielles Wachstum ist langsamer als exponentielles"

• $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 \;(\to 0)}{x \;(\to 0)} \overset{10.6.3)}{=} 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^n} = \lim \frac{e^{(n+\frac{1}{2})\ln(n)-n}}{e^n} = \underline{\underline{\infty}}$

$n! \overset{\text{Stirling}}{\approx} \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n = n^{n+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot e^{-n} = e^{(n+\frac{1}{2})\ln(n)-n}\,\sqrt{2\pi}$



Zu 2.): Einseitige GW: $\lim\limits_{x \to 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Bsp.: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 5 \\ -x+3, & x \leq 5 \end{cases}$

Haben:

$$\lim_{x \to 5+} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(5+h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left((5+h)+1\right) = 6$$

$$\lim_{x \to 5-} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(5-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left(-(5-h)+3\right) = -2$$

Zu 3): $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 (1-x^2)^n$

Frage: Ist g stetig?

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2 \cdot (1-x^2)^n = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{1-x^2}_{=:q})^n$$

geom. Reihe $|q| < 1$

Hier: $q = 1 - x^2 \rightsquigarrow |q| = |\underbrace{1-x^2}_{\leq 1}| = 1 - \underbrace{x^2}_{\geq 0} \underset{\text{für } x \neq 0}{<} 1$.

Falls $x \neq 0$, ist $g(x) \overset{\text{geom.}\Sigma}{\underset{x \neq 0}{=}} x^2 \cdot \frac{1}{1-q} = x^2 \cdot \frac{1}{1-(1-x^2)} = 1$

$\rightsquigarrow |q| < 1$

Achtung: $x \neq 0$!

geom. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Falls $x = 0$, ist $g(x) = 0$

Somit: $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Also ist g stetig in $x_0 \in [-1,1] \setminus \{0\}$, unstetig in $x_0 = 0$

Bsp.: $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{array} \right\} = \underbrace{x+1}_{\text{stetig}} \quad , x \in \mathbb{R}$

Hatten $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, die Fkt. ist stetig!

Beh.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\text{Gaußklammer}} - (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

$\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} ; m \leq x\}$

unstetig bei $m \in \mathbb{Z}$

Ist f stetig? Antwort: Ja!

$\rightsquigarrow$ untersuche nur $x = m \in \mathbb{Z}$, sonst klar (für $x \notin \mathbb{Z}$ ist $\lfloor x \rfloor$ stetig)

Haben $f(m+) = \lim\limits_{x \to m+} f(x) = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} f(m+h) = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \left(m+h - \lfloor m+h \rfloor - (m+h-\lfloor m+h \rfloor)^2 \right)$

$= \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \left(m+h - m - (m+h-m)^2 \right) = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} (h - h^2) = 0 - 0^2 = 0$ ✓

und $f(m-) = \lim\limits_{x \to m-} f(x) = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} f(m-h) = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \left(m-h - \lfloor m-h \rfloor - (m-h-\lfloor m-h \rfloor)^2 \right)$

$= \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \left(m-h-(m-1) - (m-h-(m-1))^2 \right)$

$= \lim\limits_{h\to 0, h>0} \left(-h+1 - (-h+1)^2 \right) = -0+1-(-0+1)^2 = 1-1^2 = 0$ ✓

und $f(m) = \overbrace{m - \underbrace{\lfloor m \rfloor}_{m}}^{=0} - (\underbrace{m - \lfloor m \rfloor}_{0})^2 = 0$. Ergebnis: f stetig (in 0)

Weiter: f ist 1-periodisch, $f(x + m\cdot 1) = f(x)$, $m \in \mathbb{Z}$

bzw. $f(x+1) = f(x)$ für alle $x \in D_f$.

$f(x) = x - \lfloor x \rfloor - (x - \lfloor x \rfloor)^2$ ist 1-periodisch,

weil $f(x+1) = x+1 - \underbrace{\lfloor x+1 \rfloor}_{=\lfloor x \rfloor + 1} - (x+1 - \lfloor x+1 \rfloor)^2$

$= x+1-(\lfloor x \rfloor+1) - (x+1-(\lfloor x \rfloor+1))^2$

$= x - \lfloor x \rfloor - (x-\lfloor x \rfloor)^2 = f(x)$. □

Ü: $f(x) = x \cdot \lfloor 2x \rfloor$, $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig?

Zu 4.): glm. Stetigkeit $\Leftrightarrow$ Stetigkeit

$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$

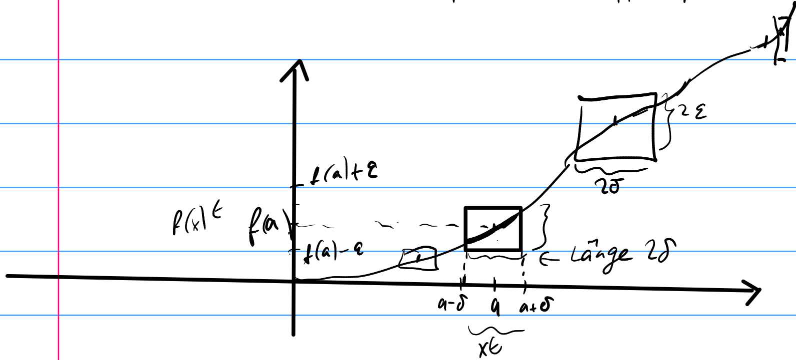
Hatten: 10.8.: $[a,b]$ echtes IV, beschränkt

Vor.: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$

Beh.: f stetig $\Rightarrow$ f glm. stetig

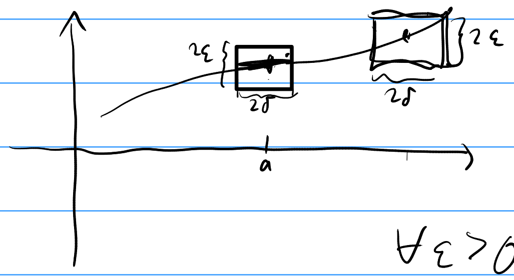
Anwendung: $f(x) = x^2$ ist nicht glm. stetig, $f: [0, \infty[\to \mathbb{R}$

Aber: $f: [1,10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist glm. stetig nach 10.8. ✓



$|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$

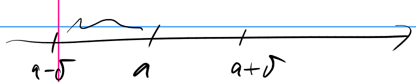


glm. stetig → die ε-δ-„Kasten" haben überall dieselbe Größe:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a, x \in D_f:$

$|x-a| = |a-x| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

$|a-x| = |(-1)\cdot(x-a)|$



$|x-a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x-a < \delta$

$\Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$

Zu 5): Häufungspunkt

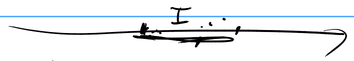
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ← dafür muss a ein HP von D_f sein!

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

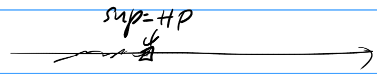
Def.: $x_0 \in M$ ist isolierter Punkt von M $:\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : M \cap \mathcal{U}^{\varepsilon}_{x_0} = \{x_0\}$

Def.: $x_0 \in \mathbb{R}$ ist HP von $M :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : M \cap (\underbrace{\mathcal{U}^{\varepsilon}_{x_0} \setminus \{x_0\}}_{=\{x;\ 0<|x-x_0|<\varepsilon\}}) \neq \emptyset$

- Jeder Punkt eines echten IVs (insb., mind 2 Punkte) I ist HP von I.



- Ist $\alpha = \sup M$, wo $M \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \notin M \Rightarrow \alpha$ HP ✓



- Ist $\alpha = \sup M$, wo $\alpha \in M$, muss dies nicht so sein!

Bsp.: $M = [0,1] \cup \{2\} \rightsquigarrow \sup M = \max M = 2 \in M$

aber 2 ist isoliert, kein HP!

ist kein IV, da nicht zusammenhängend,

denn $\neg(\underbrace{x,y \in M,\ z \in \mathbb{R},\ x<z<y}\ \Rightarrow z \in M)$ □