Tutorium zur Analysis I, 13.12.24

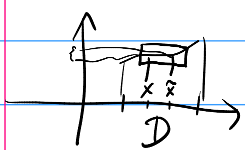
zu Kap. An 11/12

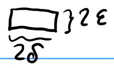
1) glm. Stetigkeit prüfen ← 1b) Stetigkeit im IV
2) Def. HP
3) 11,4 ⟷ Bed. für Diff'barkeit
4) rechts-/links-Diff'barkeit
5) Bsp. Ableitungsregeln ✓
6) Bsp. höhere Ableitungen ✓

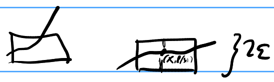
Zu 1): glm. Stetigkeit:

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

f heißt glm. stetig $:\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, a \in D: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$







(ii) A5 Bl. 9: $f: [0,\infty[\to \mathbb{R}$, f glm. stetig $\Rightarrow |f(x)| \leq M(1+x)$ (für ein $M>0$, alle $x \geq 0$) ← linear beschr.

⤳ $f(x) = x^2$ wächst stärker als linear! → nicht glm. stetig!

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$

Beh.: f ist glm. stetig

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$ geg. Dann setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$

Dann: Wenn $|x-a| < \delta$, dann ist

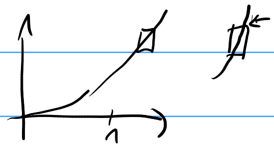
$$|f(x) - f(a)| = |2x + 3 - (2a + 3)| = 2 \cdot |x-a| < 2\delta = \varepsilon.$$

□

f nicht glm. stetig $\Leftrightarrow \neg \left(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, a \in D: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \right)$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0: \exists x, a \in D: |x-a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

Bsp.: $f(x)=x^2$, $f: [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$



Beh.: f ist nicht glm. stetig

Bew.: Sei $\varepsilon := 1$.

Weiter sei $\delta > 0$ bel. vorgeg.

Wenn x, a geg. mit $|x-a|<\delta$, etwa $a := \frac{1}{\delta}$, $x := \frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$ ✓

dann ist $\rightsquigarrow |x+a| = \frac{2}{\delta}+\frac{\delta}{2}$

$$|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| = |x-a|\cdot|x+a| = \frac{\delta}{2}\cdot|x+a| = \frac{\delta}{2}\cdot\left(\frac{2}{\delta}+\underbrace{\frac{\delta}{2}}_{>0}\right) > \frac{\delta}{2}\cdot\frac{2}{\delta} = 1 = \varepsilon.$$

✓ □

δ kann von a abh.!

- f stetig: $\forall \varepsilon>0\ \forall a\in D: \exists \delta>0\ \forall x,\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$
- f glm st.: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall a\ \forall x,\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

δ hängt nicht von a ab!

Zu 1) b): $D\subseteq\mathbb{R}$ kann IV sein.

$\to$ $f: I\to\mathbb{R}$ stetig, I echtes beschränktes, abgeschl. IV

Dann: f glm. stetig. ✓

Bsp.: $I=[0,1]$, $f(x)=x^2$, $f: I\to\mathbb{R}$ ist glm. stetig

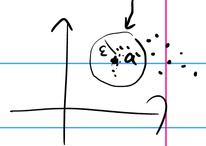
---

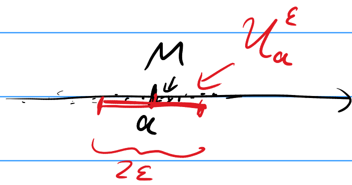
Zu 2): $a\in\mathbb{R}$ heißt HP von $M\subseteq\mathbb{R}$, falls

$\exists\ (x_n)\subseteq M$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, die $x_n\neq a$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0: \underbrace{U_a^\varepsilon}_{=]a-\varepsilon,\,a+\varepsilon[}\setminus\{a\}\cap M\neq\emptyset$

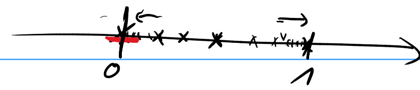
in $\mathbb{C}$: $U_a^\varepsilon = \{z\in\mathbb{C};\ |z-a|<\varepsilon\}$





Bsp.: $M=\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{1-\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{C}$

$a=0$ und $a=1$ sind die HPe von M



- $M=\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}$, mit $a_n\to c$
  $\Rightarrow$ c ist HP
- $M=]0,1[$ $\rightsquigarrow$ die HP sind alle $c\in[0,1]$
- $M=[a,b]$ hat die HPe sind $a, b, \frac{a+b}{2}, \dots$ sogar alle $c\in M$!

Zu 3): Kriterien für Diff'barkeit:

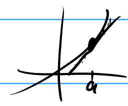
Geg. $f: D \to \mathbb{K}$, $a \in D$, a HP von D.

1) f diff'bar in a $:\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{z\to a\\ z\neq a}} \underbrace{\boxed{\frac{f(z)-f(a)}{z-a}}}_{h(z):=}$ ex., dies heißt $f'(a)$

$\Leftrightarrow$ 2) $\exists\, h: D \to \mathbb{K}$ stetig in a: $f(z)-f(a) = h(z)\cdot(z-a) \Leftrightarrow f(z) = f(a) + \underbrace{h(z)}_{h(a)=f'(a)}\cdot(z-a)$

$\Leftrightarrow$ 3) $\exists\, A \in \mathbb{K}$ $\exists\, r: D \to \mathbb{K}$ stetig in a, $r(a) = 0$:

$$f(z) = \underbrace{f(a) + \underbrace{A}_{A=f'(a)}\cdot(x-a)}_{=t_a(x) \text{ Tangentenfkt.}} + r(x)\cdot(x-a)$$



später nützlich in Analysis II!

Bsp.: $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- ist diff'bar nach 2), da: mit $h(x) = x+a$, stetig in a, $h(a) = a+a = 2a$

  gilt $f(x)-f(a) = x^2-a^2 = (x+a)\cdot(x-a) \stackrel{!}{=} h(x)\cdot(x-a)$. $\square$

- ist diff'bar nach 3), da:

  mit $A = 2a$, mit $r(x) = x-a$ stetig in a, $r(a) = a-a = 0$,

gilt: $f(x) = f(a) + A\cdot(x-a) + r(x)(x-a)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = a^2 + 2a\cdot(x-a) + (x-a)\cdot(x-a)$

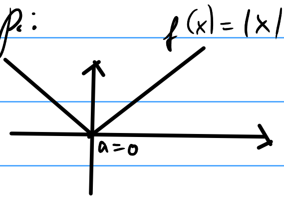
$\Leftrightarrow \quad x^2 - a^2 - 2a(x-a) = (x-a)\cdot(x-a)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2a - a^2 + 2a^2 = (x-a)^2$ ✓ $\square$

~~$\Leftrightarrow r(x) = \frac{x^2-a^2-2a(x-a)}{x-a} = x+a-2a = x-a$~~

Zu 4): $f'_+(a) := \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $\quad f'_-(a) := \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Bsp.:



f ist in 0 nicht diff'bar,

und $f'_+(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \underbrace{\frac{|x|-|0|}{x-0}}_{=1} = 1$, $\quad f'_-(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \underbrace{\frac{|x|-|0|}{x-0}}_{=\frac{-x}{x}=-1} = -1$

Zu 5): Ableiten:

- $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 5 \rightsquigarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$
- $f(x) = x^2 - \underbrace{x^3}_{u} \underbrace{\ln(x)}_{v} \rightsquigarrow f'(x) = 2x - \left(3x^2 \ln(x) + x^3 \cdot \frac{1}{x}\right)$

  $u' = 3x^2$, $v' = \frac{1}{x}$ $\qquad = 2x - \underbrace{3x^2 \ln(x) - x^3 \cdot \frac{1}{x}}$ ✓

- $f(x) = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)\cos(x)}_{v} \rightsquigarrow f'(x) = 1 \cdot \sin(x)\cos(x) + x \cdot (\underbrace{\sin(x)}_{u}\underbrace{\cos(x)}_{v})'$

  $= \sin x \cos x + x \cdot (\cos^2(x) - \sin^2(x))$

- $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{1/5} \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{5} \cdot x^{-4/5}$!

  $\frac{1}{5} - 1 = -\frac{4}{5}$

  $f(x) = x^{\frac{1}{v}} \rightsquigarrow f' = \frac{1}{v} x^{\frac{1}{v} - 1}$

  denn:

  $f(x) = e^{\frac{1}{v} \ln(x)}$

$\rightsquigarrow f'(x) = \underbrace{e^{\frac{1}{v}\ln(x)}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{\frac{1}{v} \cdot \frac{1}{x}}_{\text{innere}} = \frac{1}{v} x^{\frac{1}{v}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{v} \cdot x^{\frac{1}{v} - 1}$ ✓

im Bsp.: $v = 5$ ✓

$\left[g(x) = \frac{1}{v} \ln(x) \rightsquigarrow g'(x) = \frac{1}{vx} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{x} \right]$ $\qquad \left[\ln'(x) = \frac{1}{x} \right]$

- $f(x) = \frac{x + e^x}{x^3} \rightsquigarrow f'(x) = \frac{(1 + e^x) \cdot x^3 - (x + e^x) \cdot 3x^2}{x^6}$

  $u(x) = x + e^x$
  $v(x) = x^3$

  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ Quotientenregel

  $= \frac{1 + e^x}{x^3} - \frac{x + e^x}{x^4} \cdot 3$

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^x - e^0}{x - 0}} = (e^x)'(0) = e^0 = 1$ ✓

- $\lim_{h \to 1} \frac{h^2 + h - 2}{h - 1} = \lim_{h \to 1} \frac{f(h) - f(1)}{h - 1} = f'(1) = \underline{\underline{3}}$.

  $f(h) = \underline{h^2 + h}$, $f(1) = 2 \rightsquigarrow f'(h) = 2h + 1$

<u>zu 6)</u>:

- $f(x) = x^3 \rightsquigarrow f'(x) = 3x^2 \rightsquigarrow f''(x) = 6x \rightsquigarrow f'''(x) = 6$
  $\rightsquigarrow f^{(4)}(x) = 0$
  $= f^{(5)}(x) = \ldots = 0$

- Haben: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ist bel. oft diff'bar
- auch: $f(x) = e^x$
- auch: $f(x) = \sin(x)$
  $f'(x) = \cos(x)$
  $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$,
  $f^{(4)}(x) = \sin(x)$

  bel. oft diff'bar
- $f(x) = e^{2x^3}$ "

- aber: $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{schnelles Oszillieren nahe } 0}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

  1-mal diff'bar, nicht 2-mal diff'bar (in 0)

  $\rightsquigarrow$ vgl. spätere Ü