

Tutorium in Analysis I, An 11, 12, 13, 14,

①

$$a_m = \underbrace{\sqrt[m]{m}}_{= m^{\frac{1}{m}}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1, m \in \mathbb{N}$$

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

statt $m \in \mathbb{N}$ betr. $x > 0, x \in \mathbb{R}$
 dann $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^0 = 1$
 weil exp stetig

und $\left[\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \right]$, da mit de l'Hopital:

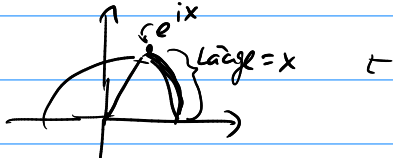
$$\rightarrow \frac{\ln'(x)}{(x)'} = \frac{\frac{1}{x}}{1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

d.h. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

Funktion

② Bsp. GW ✓, ③ Abf. Fkt. ✓

④ Bsp: lokale / globale Extremum

→ ⑤ Sin/cos ⑥: 

②: • FunktionsGW, die Abl. sind:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{x^3 + e^x - (27 + e^3)}{x - 3} = f'(3) = 3 \cdot 3^2 + e^3 = 27 + e^3$$

• FunktionsGW mit de l'H:

uneigentliche GW möglich: $\lim_{x \rightarrow \infty} \dots$

• $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$

• $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\text{de l'H}}{=} 0$

$\ln(x)$ wächst langsamer als x

Abl.:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

mit $f(x) = x^3 + e^x$

$\leadsto f'(x) = 3x^2 + e^x$

-2-

$$\bullet \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = x \ln(x) \rightarrow \infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 ∞ ∞

$$\bullet \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad , \quad \text{haben} \quad \frac{\ln(x)}{x^r} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \quad \underline{r > 0}$$

• Was wächst schneller für $x \rightarrow \infty$?

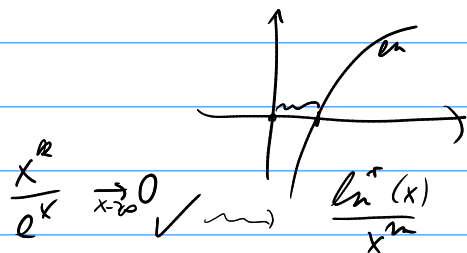
$$\ln(x) \ll e^{\sqrt{\ln(x)}} \ll x^7 \ll e^{2x} \ll 10^x$$

$$\bullet \frac{\ln(x)}{e^{2x}} \rightarrow 0, \text{ da } \frac{\frac{x}{2}}{e^{2x}} \rightarrow 0 \quad \bullet \frac{x^7}{e^{2x}} \rightarrow 0, \text{ da } \frac{7x^6}{2e^{2x}} \rightarrow 0, \text{ da } \frac{42x^5}{4e^{2x}} \rightarrow 0 \dots \rightarrow 0$$

$$\bullet \frac{e^{\sqrt{\ln(x)}}}{x^7} \rightarrow 0, \quad \bullet \frac{e^{2x}}{10^x} = \frac{(e^2)^x}{10^x} = \left(\frac{e^2}{10}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

da l.g. = $e^{\frac{e^{2x} - 7 \ln(x)}{e^{2x}}} = e^{\frac{1}{e^{2x}}(1 - 7 \ln(x))} \rightarrow 0$ ✓

$e^2 < 10$



$$\left[a^x = e^{x \ln(a)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \right]$$

$0 < a < 1$

Bsp.: Gesucht $f'(x)$ für

$$f(x) = 2 \sqrt{x^2 + e^{\sin x}} \rightarrow f'(x) = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^2 + e^{\sin x}}}}_{\text{äußer}} \cdot \underbrace{(2x + e^{\sin x} \cdot \cos x)}_{\text{innere}}$$

NRen: Sei $g(x) = \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Sei $h(x) = x^2 + e^{\sin x}$

$$\rightarrow h'(x) = 2x + \underbrace{e^{\sin x}}_{\text{äußer}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{innere}} \quad \checkmark$$

Bsp.: Gesucht $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}} = ?$

" $\sqrt{0+1} - 1$ " = "0"
"0"

$$\left. \begin{aligned} \text{Mit de l'H.: } f(x) &= \sqrt{x+1} - 1 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ g(x) &= \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned} \right\}$$

-3-

Haben: $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{1} = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ stetig in 0

n/s

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}} = 0 \checkmark$$

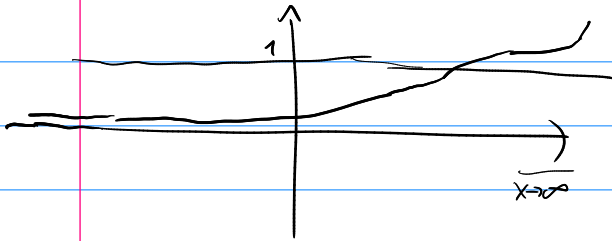
(4): Beh.: $\underbrace{e^{2x/3} \cdot (2+x^2)}_{=: f(x)} = 1$ hat genau eine Lösung in $\mathbb{R}$!

$\exists!$ $\uparrow$ $\leftarrow$ End.?

$\rightarrow$ Kurvendiskussion für f :

für $x \rightarrow \infty$ ist $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$
für $x \rightarrow -\infty$ ist $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

da $e^{2x/3} = (e^{2/3})^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$



Deswegen, da $f(x)$ stetig,
wird der Wert $y=1$ an irgendeiner Stelle x
wegen ZWS

$f(x) = \underbrace{e^{2x/3}}_{=: m(x)} \cdot \underbrace{(2+x^2)}_{=: v(x)} \rightarrow f'(x) = m'(x)v(x) + m(x)v'(x)$
 $= e^{2x/3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2+x^2) + e^{2x/3} \cdot 2x$

$\rightarrow m'(x) = \underbrace{e^{2x/3} \cdot \frac{2}{3}}$
 $= e^{2x/3} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x \right)$

$= \underbrace{e^{2x/3} \cdot \frac{2}{3}}_{>0} \cdot \underbrace{(x^2 + 3x + 2)}_{\stackrel{!}{=} 0} = e^{2x/3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \underline{(x+1)(x+2)}$

NR: $x^2 + 3x + 2 \rightarrow x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

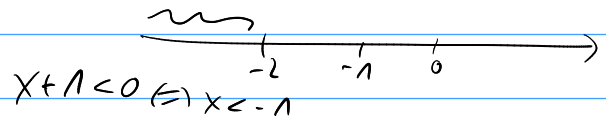
$\rightarrow x_1 = -2, x_2 = -1$

$x^2 + 3x + 2 = (x - (-1))(x - (-2))$
 $= \underline{(x+1) \cdot (x+2)} \checkmark$

- 4 -

$$f'(x) = e^{2x/3} \cdot \frac{2}{3} \underbrace{(x+1)}_{<0} \cdot \underbrace{(x+2)}_{<0}$$

Haben: $f' \uparrow]-\infty, -2[> 0 \rightarrow f$ isoton
 $x < -2 \checkmark$

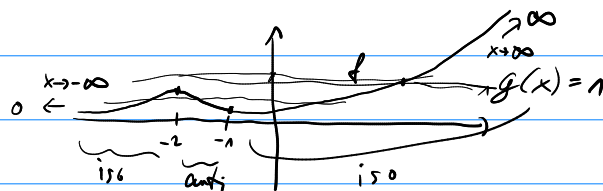


$f' \uparrow]-2, -1[< 0 \sim f$ antiton

$-2 < x < -1$
 $\frac{-2}{<0} \frac{-1}{>0}$

da $\underbrace{(x+1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x+2)}_{<0} < 0$

$f' \uparrow]-1, \infty[> 0 \sim f$ isoton da $\underbrace{(x+1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x+2)}_{>0} > 0$



Max. bei $x = -2$
 Min. bei $x = -1$
 dazwischen strengmonoton

$\leadsto f(x) = 1$

$$f(-1) \dots < 1$$

$$f(-2) \dots < 1$$

Bsp.: Extremwertrechnung: Welches Rechteck der Fläche $A > 0$ hat die kurzeste Diagonale?



Sei die Rechteckseiten $x, y > 0$, also

$$\text{const.} = A = \underbrace{x \cdot y}_{\text{variabel}} \leadsto y = A \cdot \frac{1}{x}, \text{ Diagonallänge: } \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{A^2}{x^2}}$$

wo ist dies minimal?

$$f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

Sei $f(x) = x^2 + \frac{A^2}{x^2}$, gesucht Stelle x_0 , wo dies minimal ist!

• Nst. von f' ausrechnen: $f'(x) = 2x + A^2 \cdot (-2) x^{-3} = 2x - 2A^2 \frac{1}{x^3} <$

Nst.: $2x = 2A^2 \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow x^4 = A^2 \Leftrightarrow x^2 = A \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{A}$

Also: $x_0 = \sqrt{A}$, $f(x_0) = (\sqrt{A})^2 + \frac{A^2}{(\sqrt{A})^2} = A + A = 2A \checkmark$

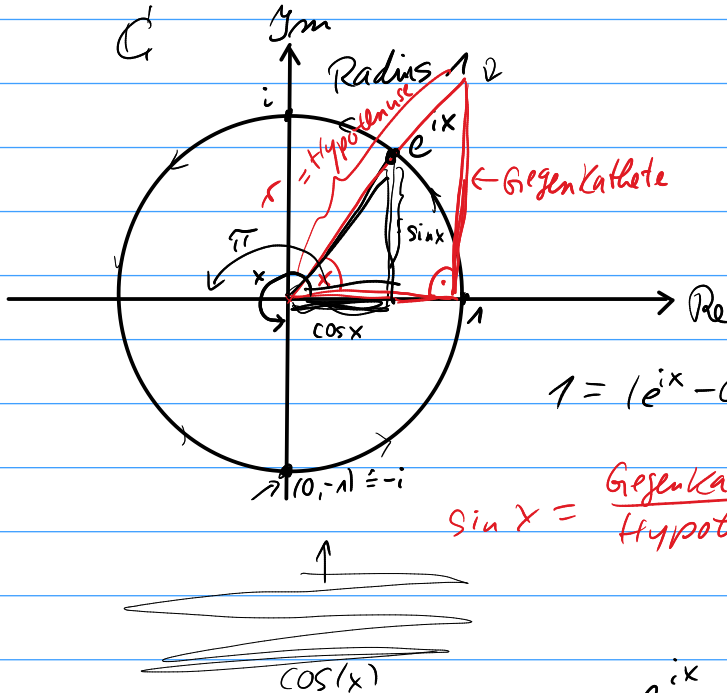
$f' \uparrow]0, \sqrt{A}[< 0$, $f' \uparrow]\sqrt{A}, \infty[> 0 \leadsto$ hat bei $x_0 = \sqrt{A}$ ein Minimum,

dazu $y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A} = x \rightarrow$ Rechteck = Quadrat!
 Diagonallänge: $\sqrt{A+A} = \sqrt{2A}$

□

⑤: Sin / cos / Bogenlänge:

$$e^{ix} = \underbrace{\cos x}_{\text{Re } e^{ix}} + i \underbrace{\sin x}_{\text{Im } e^{ix}}, \quad x \in \mathbb{R}$$



Hatten: $|e^{ix}|^2 = 1$

$$= (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos x - i \sin x)$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x$$

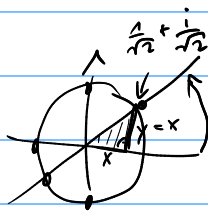
$$1 = |e^{ix} - 0| = |z| = |z - 0| \text{ Abstand von } z \text{ zur } 0$$

$$\sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{r \cdot \sin x}{r \cdot 1}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

e^{ix}	$\cos x$	$\sin x$	$x = ?$
$i \hat{=} R = (0, 1)$	0	1	$\frac{3}{2} \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot 2\pi$
$R = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pi/4 = \frac{1}{8} \cdot 2\pi$

$180^\circ \hat{=} \pi$ gestreckter Winkel
 2π Vollkreis



$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$