

Tutorium zur Analysis I, Kap. An 16, An 17

HDI Partialbrüche

- ✓ 1) a) Kriterien: diff'bar
- b) " : int'bar

✓ 2) HDI, 2. Teil

✓ 3) Partielle Integration für Ie

✓ 4) Substitutionsmethode für Ie

✓ 5) Jensensche Ungl. (Konvexität)

✓ 6) Polynomdivision

$\left[\begin{array}{l} 8) \text{ Supremumsnorm} \\ 9) \text{ glm. Kgz} \end{array} \right] \rightarrow \text{ tut An 18}$

✓ 7) Partialbruchzerlegung:

z.B. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Zu 1) a): Kriterien für Diff'barkeit:

- Check: stetig? $\rightarrow$ wenn nein, dann: $\rightarrow$ nicht diff'bar

Bsp.:

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & (x \neq 0) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

ja:

- ist f zusammengesetzt aus diff'baren Funktionen? $\rightarrow$ ja ✓

• Check Differenzenquotient: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

bei $x = a$:

untersuche Kgz. für $x \rightarrow a$?

Ex. $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = ?$

Hier: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} = x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f'(0).$

d.h. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ ex., ja, diff'bar da $\sin \in [-1, 1]$ Nullfolge, beschr.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Zu 1) b): Kriterien für Int'barkeit?

• f stetig $\Rightarrow f$ int'bar ✓

• falls f unstetig, gehe auf Def. von int'bar zurück!

Zu 2): HDI, Teil 2.)?

Vor.: Sei $j \subseteq \mathbb{R}$ echtes IV, $f: j \rightarrow \mathbb{R}$,
für jedes IV $[\alpha, x] \subseteq j$ sei $f|_{[\alpha, x]}$ int'bar.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest.

sei $F(x) := \int_{\alpha}^x f(t) dt$, für $x \in j$.
 $\rightarrow F: j \rightarrow \mathbb{R}$, heißt

Integralfunktion.

Beh.: $F' = f$, d.h. $\forall x \in j: F'(x) = f(x)$, d.h. $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x)$.

1. Bsp.: $g(x) = \int_2^x \underbrace{\sin(t)}_{=f(t)} dt \Rightarrow g'(x) = \sin(x)$,

bzw. $\left(\int_2^x \sin(t) dt \right)' = \sin(x)$.

$$g(2) = \int_2^2 \sin(t) dt = 0$$

$$g(3) = \int_2^3 \sin(t) dt = -\cos(x) \Big|_2^3 = \cos(2) - \cos(3)$$

$\int_{\text{HDI, Teil 1}}$

bzw. $\frac{d}{dx} \int_2^x \sin(t) dt = \sin(x)$.

$\sin'(x) = \cos(x)$, bzw. $(-\cos)' = \sin$

$$h(x) = \int_1^x \sin(t) dt \Rightarrow h'(x) = \sin(x)$$

$$\text{denn } h(x) - g(x) = \int_1^x \sin(t) dt - \int_2^x \sin(t) dt = \int_1^2 \sin(t) dt$$

$\Rightarrow h'(x) - g'(x) = 0 \Rightarrow h'(x) = g'(x) = \sin(x)$.

-3-

$$2. \text{ Bsp.: } g(x) = \cos \left(\int_2^x t^2 dt \right), \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\uparrow$ äußere Funktion $\uparrow$ innere Funktion

$$g'(x) = \underbrace{-\sin \left(\int_2^x t^2 dt \right)}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{\left(\int_2^x t^2 dt \right)'}_{\text{innere Abl.}}$$

$\uparrow$ Kettenregel

$$= -\sin \left(\int_2^x t^2 dt \right) \cdot x^2$$

laut HDI, Teil 2

$$= -\sin \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{8}{3} \right) \cdot x^2$$

$$\text{NR: } \int_2^x t^2 dt \stackrel{\text{HDI}}{\underset{\text{Teil 1}}{=}} \frac{1}{3} t^3 \Big|_2^x = \frac{1}{3} x^3 - \frac{8}{3}$$

Zu 3): Partielle Integration:

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u v'$$

$$\text{Bsp.: } \int_0^1 \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x+e)}_v dx \stackrel{\text{p.J.}}{=} \underbrace{\frac{1}{2} x^2}_u \cdot \underbrace{\ln(x+e)}_v \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x+e} dx$$

$u(x) = \frac{1}{2} x^2, \quad v'(x) = \frac{1}{x+e}$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \ln(1+e) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 - e^2 + e^2}{x+e} dx$$

$$\text{NR: } \frac{x^2 - e^2}{x+e} = \frac{(x-e)(x+e)}{x+e} = x-e$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+e) - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - e + \frac{e^2}{x+e} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+e) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 - ex + e^2 \cdot \ln(x+e) \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+e) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - e + e^2 \ln(1+e) - (0 - 0 + e^2) \right)$$

$\uparrow$ für $x=1$ $\uparrow$ für $x=0$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+e) - \frac{1}{4} + \frac{e}{2} - \frac{e^2}{2} \ln(1+e) + \frac{1}{2} e^2$$

-4-

Zu 4): Substitutionsmethode:

$$\int_a^b f(\varphi) \varphi' \stackrel{!}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) \cos(x)}{\cos(x) + \cos^2(x)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin(x)}{1 + \cos(x)} dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{f(\varphi(t))}_{\frac{1}{1+\cos t}} \underbrace{\varphi'(t)}_{-\sin(t)} dt \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos t} (-\sin(t)) dt \\ &\rightarrow \varphi(t) = 1 + \cos(t) \\ &\quad \varphi'(t) = -\sin(t) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{S.M.}}{=} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/2)} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} &= - \int_2^1 \frac{1}{x} dx = - \ln(x) \Big|_2^1 \\ &= -(\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2)) = \ln(2). \end{aligned}$$

$f(x) = \int_2^x \frac{1}{t} dt$ ist S.F. von $\frac{1}{\ln(x)}$ (HDI, Teil 2.),

HDI:

Teil 1): $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Teil 2): $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$

Zu 5): Jensensche Ungl.:

Def: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex : $(=)$

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]: f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

($x_1 < x_2$)

Jensen-Ungl. für $n=2$

mit $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ bzw. $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

Jensen-Ungl. für $n \in \mathbb{N}$:

$$x_1, \dots, x_n \in [a, b], \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ konvex}, \quad n \geq 2, \\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1], \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1.$$

$$\text{Dann: } f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)$$

$$\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Bsp.: $f(x) = -\ln(x)$ konvex, da $f'(x) = -\frac{1}{x}$, $f'' = +\frac{1}{x^2} > 0$

Dafür gilt Jensen: $n=2$: $-\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < -\lambda_1 \ln(x_1) - \lambda_2 \ln(x_2)$
für $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, und $x_1, x_2 > 0$

z.B. $\lambda_1 = \frac{1}{2} \rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$, dann $-\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < -\frac{1}{2} \ln(x_1) - \frac{1}{2} \ln(x_2)$
 $= \frac{1}{2} \ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(\sqrt{x_1 x_2})$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(x_1) + \frac{1}{2} \ln(x_2) < \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$ ← Ungl. vom geom. und arithmetischen Mittel
für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

geom. Mittel arith. Mittel

zu 6): Polynomdivision:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 \quad \text{geom. } \Sigma$$

$$\text{geom } \Sigma: 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Polynomdiv.: $(x^2 - 1) : (x - 1) = x + 1$

$$\begin{array}{r} x^2 - 1 \\ -(x^2 - x) \\ \hline x - 1 \\ -(x - 1) \\ \hline 0 \end{array} \leftarrow \text{Rest} = 0$$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1 \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \quad \text{Erst} \\
 x^2 - 1 \\
 \underline{-(x^2 - x)} \\
 x - 1 \\
 \underline{-(x - 1)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 2}{x - 1} = \frac{x^3 - 1 - 1}{x - 1}$$

$$= \frac{x^3 - 1}{x - 1} - \frac{1}{x - 1}$$

$$= x^2 + x + 1 - \frac{1}{x - 1}$$

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 2) : (x - 1) = x^2 + x + 1 - \frac{1}{x - 1} \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 x^2 - 2 \\
 \underline{-(x^2 - x)} \\
 x - 2 \\
 \underline{-(x - 1)} \\
 -1 \leftarrow \text{Rest}
 \end{array}$$

Zu 7): Partialbruchzerlegung: $\frac{x^3 - 2}{x - 1} = x^2 + x + 1 - \frac{1}{x - 1}$ ✓

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-2} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}, \text{ n\u00e4mlich:}$$

Einsetzungsmethode: $\int \frac{1}{(x^2 - 4)} \rightarrow 1 = a(x-2) + b(x+2)$

• Setze $x = -2$: $1 = a \cdot (-2-2) + \cancel{b \cdot 0} \rightarrow a = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$

• Setze $x = 2$: $1 = \cancel{a \cdot 0} + b \cdot (2+2) \rightarrow b = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

Somit: $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{-1/4}{x+2} + \frac{1/4}{x-2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-2}$

S.F.: $\int \frac{1}{t^2 - 4} dt = -\frac{1}{4} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|x-2|$