

Tutorium zur Analysis I, Kap. 18/19

✓ 1) Supnorm

✓ 2) glm. Kgt $\leadsto$ Beweis?

✓ 3) Majorantenkri. für Potenzreihen

✓ 4) Taylorreihe

Zu 1):

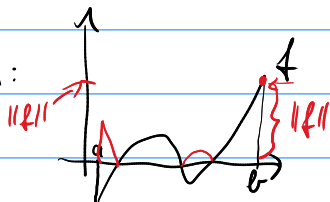
$f \in \mathcal{L}_b$

Vor.: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f beschränkt

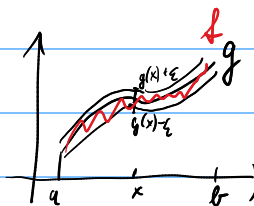
Dann heißt $\|f\| = \|f\|_{[a, b]} := \sup_{\geq 0} \{ \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0}; x \in [a, b] \} \geq 0$

(Supremums)norm von f

• Anschaulich:



• $\|f - g\|$ anschaulich:



$$\|f - g\| < \varepsilon$$

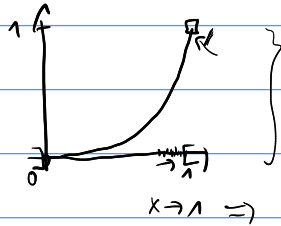
$$(\Rightarrow) \forall x \in [a, b]: -\varepsilon < (f - g)(x) < \varepsilon$$

$$(\Rightarrow) \quad \quad \quad : g(x) - \varepsilon < \underline{f(x)} < g(x) + \varepsilon$$

Bsp.: Supremumsnorm ausrechnen:

1. $f(x) = x^2, f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\| = \|f\|_{]0,1[} = \sup \{ x^2 ; x \in]0,1[\} = 1,$$



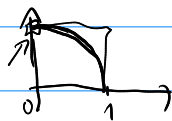
denn mit $z_n \rightarrow 0, z_n > 0$

haben wir $(1 - z_n)^2 = 1 - 2z_n + z_n^2 \xrightarrow{z_n \rightarrow 0} 1.$

$x \rightarrow 1 \Rightarrow x^2 \rightarrow 1$

2. $f(x) = x^n, f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \leadsto \|f\| = 1.$

3. $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1-x} \leadsto \|f\| = 1$

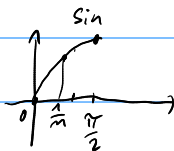


$\sqrt{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

4. $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right), n \in \mathbb{N}$

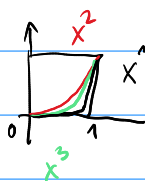
$$\|f\| = \left\| \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right\|_{]0,1[} = \frac{1}{n} \cdot \left\| \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right\|_{]0,1[}$$

$= \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$



haben $\frac{x}{n} \in]0, \frac{1}{n}[$

5. $\left\{ \begin{array}{l} 0, x \neq 1 \\ 1, x = 1 \end{array} \right\} = f(x)$ unstetig!

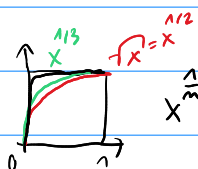


punktwise Kgz.

$\left[x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{0 \cdot \ln(x)} = 1 \right]$

Kann nicht glm. Kgt. sein, denn die Grenzfkt. f ist unstetig (vgl. Satz der Vorl.)

6. $\left\{ \begin{array}{l} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left\{ \begin{array}{l} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{array} \right\}$ nicht glm.!



$[0^0 := 1]$

Zu 2): Glm. Konvergenz, d.h. Kgt. in der Supremumsnorm:

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f : \Leftrightarrow \|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \sup \{|f_n(x) - f(x)|; x \in D\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0: \sup \{|f_n(x) - f(x)|; x \in D\} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \boxed{\forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon} \leftarrow$$

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ptw.}} f : \Leftrightarrow \forall x \in D: f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall x \in D} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Kriterien für glm. Kgt.:

- Majokrit. von Weierstraß für Reihen, s.u.
- sonst: überprüfen mit Def.!

Bsp.: $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

geom. Reihe

Beh: Glm. Kgt. in $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$.

Bew.: Haben $f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x} =: f(x)$

für jedes $x \in]-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}[$, d.h. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ptw.}} f$.

• ist glm. Kgt. auf $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, denn

Ansatz: $\|f_n - f\| = \left\| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right\|_{[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]} = \left\| \frac{-x^{n+1}}{1 - x} \right\|$

$= \left\| \frac{-1}{1 - x} \cdot x^{n+1} \right\| = \left| \frac{1}{1 - x} \right| \cdot \|x^{n+1}\|_{[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]} \leq \boxed{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

ob. Schranke $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

P.L.

$= \sup \{|x|^{n+1}; x \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]\} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

haben auf $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ aber $\frac{1}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$.

Also ist $f_n \Rightarrow f$ in $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. Bem.: auch in $[-\frac{9}{10}, \frac{9}{10}]$, $]-\frac{99}{100}, \frac{99}{100}[$, ... nicht in $] -1, 1[$!

Zu 3): Kriterium für glm. Kgt. von Reihen,
bzw. Weierstraß-Majorantenkrit. für Reihen:

f_n, f vorgeg. wie oben.

Vor.: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ Kgt., die $\delta_n \geq 0$,
für alle hinreichend große n : $\|f_n\| \leq \delta_n$.

Dann: $\sum_{j=1}^n f_j \xrightarrow{\text{glm.}} f$

d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$ ist
Majorante $\sum f_n(x)$,
nämlich: $|\sum f_n(x)| \leq \delta_n$
für alle $x \in D$

Im Bsp.: $\sum_{j=0}^n x^j \Rightarrow \frac{1}{1-x}$

auf $\underbrace{[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]}_{x \in D}$, denn $\sum_{j=0}^n \overbrace{(\frac{2}{3})^j}^{=\delta_j}$ ist Majorante,

$$\text{denn } \sum_{j=0}^n x^j \leq \sum_{j=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^j,$$

$$\text{d.h. } \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 \text{ ist Kgt. Majo.}$$

Also folgt glm. Kgt. wegen W.-Majo-Krit.-Satz.

Bsp.: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, d.h. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ist glm. Kgt., denn

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^M f_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^2} \cdot \underbrace{\left| \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right|}_{\substack{\text{hängt von } x \\ \text{ab!}}} \leq \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^2} \stackrel{=\delta_n}{=} \text{Kgt.}, \end{aligned}$$

$\uparrow$
unabh. von x

d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergente Majorante, also glm. Kgt. nach W.-Krit.

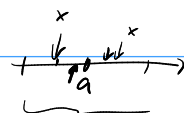
Zu 4): Taylorreihe im Bsp.:

Potenreihe

Taylor-Satz: $f(x) = \underline{f(a)} + \underline{f'(a)}(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$

Lagrange-Restglied: $R_m(x) = f^{(m+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}$, $\xi \in \mathbb{R}$ zwischen a und x

Bsp.: $f(x) = e^x$, sei $a \in \mathbb{R}$ Entwicklungspunkt.



Dann: $e^x = e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2}(x-a)^2 + \frac{e^a}{6}(x-a)^3 + \underline{R_3(x)}$

Bsp.: $a=0$: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{m!}x^m + \underline{R_m(x)}$

dabei ist $\underbrace{|R_m(x; 0)|}_{\text{Lagrange}} = \underbrace{\left| e^\xi \cdot \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \right|}_{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange} \\ \xi \in]0, x[\cup]x, 0[}} \leq \underbrace{\left[e^x \right]}_{\substack{\text{unabh.} \\ \text{von } n}} \cdot \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ (punktweise: $x \in \mathbb{R}$ fest)
 $\xrightarrow{!} 0$
 $\nearrow$ vgl. 8.5.!

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a=0$ Taylorentwickeln!

Haben: $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, d.h. $f'(0) = -1!$

$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, d.h. $f''(0) = 2 = \underline{2!}$

$f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$, d.h. $f'''(0) = -6 = -3!$

$\vdots$
 $\underline{f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n!}$

Also: $f(x) = f(0) + \underline{\frac{f'(0)}{1!}}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + R_3(x)$

hier: $\underline{\frac{1}{1+x}} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + R_6(x)$

-6-

Ergebnis:

Wir haben: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underline{(-x)^n} \text{ geom. Reihe,}$$

also $= \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \checkmark \quad (|x| < 1)$

Bsp.: $f(x) = \underline{\ln(1+x)}$, $a=0$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{1+x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \dots$$

Also:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Taylor: $f(x) = f(0) + \underline{f'(0)}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$

$$\text{hier: } \ln(1+x) = 0 + x + \frac{(-1) \cdot 1!}{2!}x^2 + \frac{(-1)^2 \cdot 2!}{3!}x^3 + \frac{(-1)^3 \cdot 3!}{4!}x^4 + \dots$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

$$\underline{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}}$$

Potenzreihe des $\ln$
 $(|x| < 1)$

(u): Entwickle $f(x) = \ln(\cos(x))$ in Potenzreihe
um $a=0$, bis Taylor-Polynom P_2
von Grad 2.
