

- 1 - Tutorium zur Analysis 1, Kap. An 1, An 2

Themen:

1) Bernoulli

5) $f(f^{-1}(x)) = x$

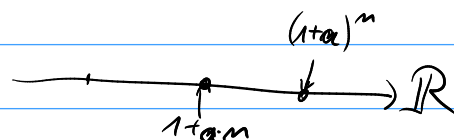
2) Bsp. Σ -Zeichen
II-Zeichen

6) ~~Aufg. 4~~

3) a) Δ -Unglg.

b) "nach unten"

4) Unglg. lösen



Zu 1): Bernoulli: $\forall a \in \mathbb{R}_{\geq -1} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0: (1+a)^m \geq 1+ma$ ✓

Z.B. $a = -\frac{1}{2}: (1-\frac{1}{2})^m \geq 1-\frac{1}{2} \cdot m$

$(\Leftrightarrow) (\frac{1}{2})^m \geq 1-\frac{1}{2} \cdot m$

$(\Leftrightarrow) \frac{1}{2^m} \geq 1-\frac{m}{2}$

$(\Leftrightarrow) \frac{m}{2} - 1 \geq -\frac{1}{2^m}$

$(\Leftrightarrow) \frac{m}{2} \geq 1 - \frac{1}{2^m} \quad | \cdot 2$

$(\Leftrightarrow) m \geq 2 - \frac{2}{2^m} = 2 - \frac{1}{2^{m-1}}$

Z.B. $m=2, a=-\frac{1}{2}: (1-\frac{1}{2})^2 \geq 1-\frac{1}{2} \cdot 2$

$\Rightarrow (1-\frac{1}{2})^2 \geq 1-1=0$

$(\Leftrightarrow) (\frac{1}{2})^2 \geq 1-1=0$

$(\Leftrightarrow) \frac{1}{4} \geq 0$ ✓

Beh.: $\forall m \in \mathbb{N}_0: (\forall a \geq -1: (1+a)^m \geq 1+ma)$ $\leftarrow$ für $m=0$ ist " $=$ "

Bew. mit vollst. Induktion:

1. Ind. anf.: $m=0: \text{l. P.}(0) = (1+a)^0 = 1 = 1+0 \cdot a = \text{r. P.}(0)$ ✓

2. Ind. schritt: $m \rightarrow m+1: \overline{A(m)} \Rightarrow A(m+1):$

$\text{l. P.}(m+1) = (1+a)^{m+1} = (1+a)^m \cdot (1+a) \geq (1+ma) \cdot (1+a)$

$\geq 1+ma$
Ind. Vor.

$1+a > 0$

laut Vor. $a > -1$

$\stackrel{(\text{D})}{=} 1+a+ma+ma^2 = 1+a \cdot (m+1) + \underbrace{ma^2}_{\geq 0} \geq 1+(m+1)a = \text{r. P.}(m+1)$

3. Ind. schluss: Also gilt die Formel für alle $m \in \mathbb{N}_0$. □

-2-

Zu 2): Σ -Zeichen: z.B. $\sum_{j=2}^{10} x_j = x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{10}$

dabei sei $x_0, x_1, \dots$ eine Folge,

d.h. eine Abb. $x: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto x_n$

z.B. $x_n = 2 \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}_0$

$$\rightarrow x_0 = 0, \quad x_1 = 2 \cdot 1 = 2, \quad x_2 = 2 \cdot 2 = 4, \\ x_3 = 6, \quad x_4 = 8, \dots$$

Dann ist $\sum_{j=2}^{10} x_j = \sum_{j=2}^{10} (2 \cdot j) = 4 + 6 + 8 + \dots + 20$

Bsp.: $\underbrace{1}_{x_0} + \underbrace{4}_{x_1} + \underbrace{7}_{x_2} + 10 + \dots + 301$

$$x_j = 1 + 3j$$

$$= \sum_{j=0}^{100} (1 + 3j) \leftarrow$$

$$= \sum_{j=0}^{100} 1 + \sum_{j=1}^{100} 3j$$

$$= \underline{101} + 3 \cdot \sum_{j=1}^{100} j$$

$$\begin{aligned} &= 101 + 3 \cdot 5050 = 101 + 15150 \\ &= \underline{\underline{15251}} \checkmark \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{kl. Gau\ss} \\ \sum_{j=1}^m j = \frac{m(m+1)}{2} \end{array} \right]$

Produktzeichen: $\prod_{j=1}^m x_j = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m$

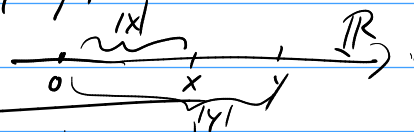
$$a - b = a + (-b)$$

Bsp.: $\prod_{j=1}^4 3^j = 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$

-3-

$$\prod_{j=1}^4 3^{-j} = 3^{-1} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-4}$$

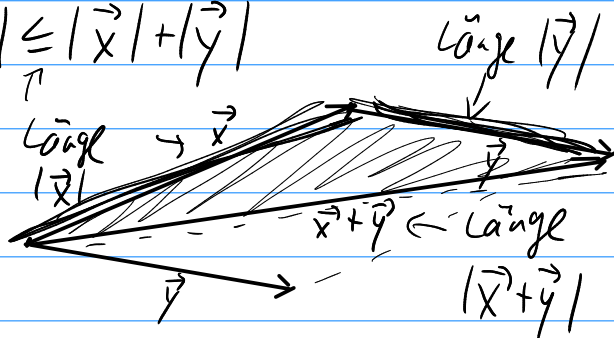
j heißt Laufindex: $j=1, 2, 3, 4$



Zu 3): Δ -Ungl.: $\forall x, y \in \mathbb{R}: |x+y| \leq |x| + |y|$

Bsp.: $x=3, y=-4.5: |3+(-4.5)| \leq |3| + |-4.5|$
 $(\Rightarrow) |-1.5| \leq 3 + 4.5$
 $(\Rightarrow) 1.5 \leq 7.5 \checkmark$

Vgl. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2: |\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$



Daher
"Dreiecks ungl."

$$|(x+y)+z| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x+y| + |z| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x| + |y| + |z|$$

$$\forall m \in \mathbb{N}_{\geq 0}: \left| \sum_{j=1}^m x_j \right| \leq \sum_{j=1}^m |x_j|$$

$$m=1: |x_1| \leq |x_1| \checkmark$$

$$m=0: \sum_{j=1}^0 x_j := 0$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^0 x_j \right| = |0| = 0 \leq 0 = \underbrace{\sum_{j=1}^0 |x_j|}_{=0} \checkmark$$

- 4 -

$$|\sum z_i| \leq \sum |z_i|$$

x ist Nullstelle
von $\sum$ Polynom

Anwendung:

Aufgabe: zeigen Sie: Vor: $|x| > 1$, seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j = 0$

Beh.: $|x| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|$

Bew.: $x^n + \sum a_j x^j = 0 \Rightarrow x^n = \sum (-a_j) x^j$

Haben: $|x^n| = |\sum (-a_j) x^j| \leq \sum |a_j x^j|$

Δ -Unglg.

$$= \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |x|^j \leq \left(\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \right) \cdot |x|^{n-1}$$

alle $|x|^j \leq |x|^{n-1}$, denn $j \leq n-1$
und $|x| > 1$

$$\begin{aligned} & |x|^{n-1} \\ \Rightarrow |x| & \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \end{aligned}$$

□

Δ -Unglg. "nach unten": $|x-y| \geq ||x| - |y||$

Bsp.: $x=3, y=-4: |3-(-4)| \geq ||3| - |-4||$
 $(\Rightarrow) 7 \geq |3-4| = |-1| = 1$

$x=-3, y=-4: |-3-(-4)| \geq ||-3| - |-4||$
 $(\Rightarrow) 1 \geq |3-4| = |-1| = 1$

$x=10, y=20: |10-20| \geq ||10| - |20||$
 $(\Rightarrow) |-10| \geq |10-20|$
 $(\Rightarrow) 10 \geq 10 \checkmark$

- 5 -

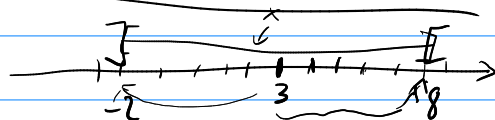
$$\begin{aligned} \text{Bsp.: } \sum_{j=0}^n (-1)^j &= 1 + \overbrace{(-1)+1}^{=0} + \dots + \overbrace{(-1)+1}^{=0} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \rightarrow \# \text{ Summanden ungerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \rightarrow \# \text{ Summanden gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Haben $(-1)^j = \begin{cases} 1, & \text{falls } j \text{ gerade} \\ -1, & \text{falls } j \text{ ungerade} \end{cases}$

$$(-1)^j : \underbrace{1}_{j=0}, \underbrace{-1}_{j=1}, \underbrace{1}_{j=2}, \underbrace{-1}_{j=3}, \dots$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 k! &= 0! + 1! + 2! + 3! \\ &= 1 + 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 1 + 1 + 2 + 6 = 10 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} 0! := 1 \\ k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k = \prod_{j=1}^k j \\ \text{z.B. } 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{Fakultät} \end{array} \right.$$

Zu 4): Bsp. Ungl. lösen:



$$\{x \in \mathbb{R}; |x-3| < 5\} \stackrel{!}{=} ?$$

$$\begin{aligned} \text{Haben } |x-3| < 5 &\Leftrightarrow -5 < x-3 < 5 \\ &\Leftrightarrow -5 < x-3 \quad \wedge \quad x-3 < 5 \\ &\Leftrightarrow -2 < x \quad \wedge \quad x < 8 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < 8 \end{aligned}$$

Zu 5): Sei $f: X \rightarrow Y$ injektiv $\Rightarrow f: X \rightarrow \underline{f(X)}$ bijektiv
 $x \mapsto y \in f(X)$
 d.h. $y = f(x)$

Umkehrabb.: $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$
 $y \mapsto x$ mit $f(x) = y$

Beh.: $f(f^{-1}(y)) = y$

Bew.: Sei $f(x) = y$. Dann $f^{-1}(y) = x$

und $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$. $\square$

Beh.: $f^{-1}(f(x)) = x$

Bew.: Sei $f(x) = y$. Dann $f^{-1}(y) = x$

und $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. $\square$

Sei $f: \underbrace{X}_{=D_f} \rightarrow Y$ bij., $f^{-1}: \underbrace{Y}_{=D_{f^{-1}}} \rightarrow X$

Dann $f^{-1}(f^{-1}(y))$ bildbar, wenn $X \subseteq \underbrace{D_{f^{-1}}}_{=Y}$
 $\in X \subseteq D_{f^{-1}}$

Sei $f: X \rightarrow X$ bij. Dann $f^{-1}: X \rightarrow X$
 $x \mapsto f(x) = y$ $y \mapsto x$ mit $f(x) = y$.

Bsp.: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \underline{2x-3}$ ist bijektiv

$y = 2x-3 \Leftrightarrow y+3 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$ $\leadsto$ erhalte Umkehrabb.: $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 (vertausche x mit y) $x \mapsto \underline{\frac{x+3}{2}}$