Tutorium zur Analysis I

Beweise:

1. indirekter Beweis → "sonst…"

Satz: $\underbrace{A}_{\text{Vor.}} \Rightarrow \underbrace{B}_{\text{Beh.}}$, indirekt: direkter Beweis von: $\overbrace{\neg B}^{\text{Annahme}} \Rightarrow 0 = 1$ ↯

also: $0 \neq 1 \Rightarrow \neg(\neg B) (\Leftrightarrow B)$

auch: direkter Beweis von $\underbrace{\neg B \Rightarrow \neg A}_{\text{Kontraposition}}$ ← ↯ zur Vor. A

2. direkter Beweis, z.B. $\forall x, y \in \mathbb{R}: (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Bew.: $l.S. = (x+y)\cdot(x+y) \underset{(D)}{=} x(x+y) + y(x+y)$

$\underset{(D)}{=} x\cdot x + x\cdot y + yx + yy$

→ speziell: vollst. Ind.

$= x^2 + 2xy + y^2$

$= r.S.$ □

---

direkt: • $A \Rightarrow C_1$, $C_1 \Rightarrow C_2$, $C_2 \Rightarrow C_3 \ldots C_m \Rightarrow B$

• $A \Rightarrow \ldots \ldots \rightarrow D_2 \Rightarrow D_1 \Rightarrow B$ (Rückwärts)

• $B \Leftrightarrow D_1 \Leftrightarrow D_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A$ "

Ringschluss: Satz: Vor. A

Beh.: Äquivalent sind:

1) B_1

2) B_2

3) B_3

4) B_4

D.h. $B_1 \Leftrightarrow B_2 \Leftrightarrow B_3 \Leftrightarrow B_4$

$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow$

$\Leftarrow \quad \Leftarrow \quad \Leftarrow$

Beweis durch Ringschluss:

Man beweist nur

$B_1 \Rightarrow B_2$

$B_2 \Rightarrow B_3$

$B_3 \Rightarrow B_4$

$B_4 \Rightarrow B_1$

$B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_3 \Rightarrow B_4 \Rightarrow B_1$

auch $B_4 \Leftarrow B_1$ ✓

2) Geometrische Σ: $q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n$

$\forall q \in \mathbb{R}_{\neq 1}\ \forall n \in \mathbb{N}_0: \quad \sum_{j=0}^{n} \boxed{q^j} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Bsp.: $q = 2$: $\sum_{j=0}^{0} 2^j = 2^0 = 1 = $ l.S.

r.S. $= \frac{2^{0+1} - 1}{2 - 1} = 1$ ✓

$\forall n \in \mathbb{N}_0: \sum_{j=0}^{n} 2^j = \underline{2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n} \overset{!}{=} \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = \underline{2^{n+1} - 1}$

$n = 1: \quad 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = 2^{1+1} - 1$

$n = 2: \quad (2^0 + 2^1) + 2^2 = 3 + 2^2 = 7 = 2^{2+1} - 1$

$n = 3: \quad 7 + 2^3 = 7 + 8 = 15 = 2^{3+1} - 1 \ldots$

$q = 10,\ n = 0 \rightarrow$

$\sum_{j=0}^{0} 10^j = 10^0 = 1 = $ l.S.

$\frac{10^{0+1} - 1}{10 - 1} = \frac{10 - 1}{10 - 1} = \frac{9}{9} = 1 = $ r.S.

$|(q-1) \neq 0$

$(\Leftrightarrow) \quad (q - 1) \cdot \sum_{j=0}^{n} q^j \overset{!}{=} q^{n+1} - 1$

$q \sum_{j=0}^{n} q^j = \sum_{j=0}^{n} q^{j+1} \underset{k = j+1}{=} \sum_{k=1}^{n+1} q^k$

Bew.: l.S. $= (q - 1) \cdot \sum q^j = q \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n} q^j}_{q^0 + q^1 + \ldots + q^n} - \sum_{j=0}^{n} q^j$

$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} q^k}_{q^1 + q^2 + \ldots + q^{n+1}} - \sum_{j=0}^{n} q^j = (q^1 + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}) - (q^0 + q^1 + \ldots + q^n)$

$= q^1 + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} - q^0 - q^1 - \ldots - q^n$

$= \underline{\underline{q^{n+1}}} - \underline{\underline{q^0}} = q^{n+1} - 1 = $ r.S. $\square$

Wohlordnungssatz:

$\forall M \subseteq \mathbb{N}_0,\ M \neq \emptyset,\ \exists p \in M : p = \min(M)$,

d.h. $\forall m \in M : p \leq m$.

Bsp.:

Sei $M = \{ m \in \mathbb{N}_0 ;\ m^2 \geq 10 \} \subseteq \mathbb{N}_0$.

Haben: $M \neq \emptyset$, da $m = 10 \in M$ weil $10^2 \geq 10$ ✓

Laut Wohlordnungssatz ex. $p = \min(M)$,

nämlich $m = 4$ tut's, denn $16 = 4^2 \geq 10$ ✓, $4 \in M$,

und $m = 3$ tut's nicht, denn $9 = 3^2 \not\geq 10$, $3 \notin M$.

$m^2 \geq 10$ ⇝ $x \in \mathbb{R}_{>0} : x^2 = 10 \iff x = \sqrt{10}$

Ex. von $\sqrt{10}$ ist garantiert durch Satz v.d. n-ten $\sqrt{\ }$

Bruchzahl im Exponent

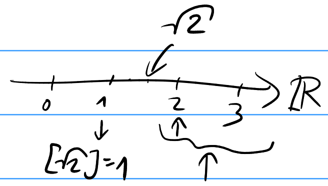
$\sqrt[n]{10} = 10^{\frac{1}{n}}$

Betr. $\{ x \in \mathbb{R}_{>0} ;\ x^2 \geq 10 \} = \{ x \in \mathbb{R}_{>0} ;\ x \geq \sqrt{10} \}$

$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

Bsp.: Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Sei $M = \{ m \in \mathbb{N}_0 ;\ m^2 \geq a \}$.



Dann $M = \{ m \in \mathbb{N}_0 ;\ m \geq \sqrt{a} \}$

$= \{ m \in \mathbb{N}_0 ;\ m \geq \underbrace{[\sqrt{a}]}_{\in \mathbb{N}_0} + 1 \}$, falls $\sqrt{a} \notin \mathbb{N}_0$

$[\sqrt{2}] = [1.4\ldots] = 1$

Bsp.: $M = \{ m \in \mathbb{N}_0 ;\ m \geq \sqrt{2} \} = \{ m \in \mathbb{N}_0 ;\ m \geq [\sqrt{2}] + 1 \}$.

$= \{ 2, 3, 4, \ldots \}$

$\sqrt{2} = 1.41\ldots$

$\frac{2}{3} < \frac{4}{5} \iff 2 \cdot 5 < 3 \cdot 4$ ✓

$\frac{1103}{217} \underset{?}{<} \frac{1233}{311}$

Was ist ε? Steht für eine beliebige (kleine) positive Zahl.

$\forall \varepsilon > 0 : \ldots$

Hatten: $\underbrace{\forall a}_{a \text{ geg.}} \; \underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\varepsilon \text{ geg., bel.}} \; \exists r \in \mathbb{Q} : |a - r| < \varepsilon$

↑ „Schranke" für den Fehler bei der Approximation von a mit r.

2.19. Bew., Ind.schritt:

$$\sum_{j=0}^{n+1} \underbrace{\binom{n+1}{j}}_{} a^{n+1-j} b^j = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j} a^{n+1-j} b^j + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j$$

$\hookrightarrow \binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$ Formel vom Pascal $\triangle$ $\quad = 0$ für $j = 0 \rightsquigarrow j \geq 1$

$$= \underbrace{a^{n+1}}_{j=0} + a \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

$\boxed{a^{n+1} = a \cdot a^n}$

$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j}_{} + \underbrace{b^{n+1}}_{j = n+1}$$

$$\overset{k = j-1}{\rightsquigarrow} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} \underbrace{b^{k+1}}_{= b^k \cdot b}$$

Term für $j = 0$

$$= a^{n+1} + a \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j + b \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b^{n+1}$$

Term für $k = n$

$$= \underbrace{a \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j}_{} + \underbrace{b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}_{}$$

$$= (a+b) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j}_{\overset{\text{Ind.vor.}}{=} (a+b)^n} = (a+b)^{n+1}.$$

Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, sei M nach oben beschränkt,
d.h. ex. $S \in \mathbb{R}: \forall m \in M: m \leq S$

z.B. $M = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 10\}$ ist nach oben beschr.,
z.B. durch $S = 4$, denn
$\forall x \in M: x^2 \leq 10 \leq 4^2 \Rightarrow x \leq 4$

Dann ex. $\sup(M) := S \in \mathbb{R}$ mit: S ist obere Schranke von M,
Kurz: $M \leq S$
$\Leftrightarrow \forall m \in M: m \leq S$,
und $\forall t \in \mathbb{R}$, t ist o.S.: $s \leq t$.

Hier: $\sup\{x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 10\} = \sqrt{10} = \max\{x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 10\}$

Ein $s \in \mathbb{R}$ ist Maximum von $M \subseteq \mathbb{R}$, $\emptyset \neq M$, M n.o. beschr.,
falls $s \in M$ und $\sup(M) = s$.

$\sup \underbrace{\{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 10\}}_{\sqrt{10} \notin \text{"}} = \sqrt{10}$, da $(\sqrt{10})^2 = 10 \not< 10$

Also $\{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 10\}$ hat kein Maximum
$= \{x \in \mathbb{R};\ -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}\}$

$x^2 < 10 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{10} \Leftrightarrow -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$

Haben: ⊛ $|x| < b \iff -b < x < b \iff -b < x \wedge x < b$

Zu A4, g) (Ü-Blatt 2): $\{x \in \mathbb{R};\ |x-1| + |x+1| < 2\} = ?$

Bsp.: $x = 0$: $|-1| + |1| = 2 \not< 2$ ↯

Haben: $|x-1| + |x+1| < 2$

$\iff |x-1| < \underbrace{2 - |x+1|}_{\text{muss} \overset{!}{>} 0 \text{ sein, damit } |x-1| < \ldots \text{ lösbar}} = b$

$2 - |x+1| > 0 \iff |x+1| < 2$

$\overset{⊛}{\iff} -2 < x+1 < 2$

$\iff -3 < x < 1$

Also sei $x \in \mathbb{R}$, $-3 < x < 1$, sonst unlösbar.

Dann: Ungl. $\overset{⊛}{\iff}$ $\underbrace{|x+1| - 2}_{-b} < x-1 < \underbrace{2 - |x+1|}_{b}$

$\iff \underbrace{|x+1| < x+1}_{|z|<z \text{ gilt niemals!}} \wedge |x+1| < \underbrace{3-x}_{>0}$

Da $|z| = \max\{z, -z\}$, ist $z \leq |z|$ → Bed. unlösbar!

Die Ungleichung ist also stets unlösbar,

d.h.

$\forall x \in \mathbb{R}: \neg(|x-1| + |x+1| < 2)$

$\iff |x-1| + |x+1| \geq 2$

Ergebnis: $\{x \in \mathbb{R};\ |x-1| + |x+1| < 2\} = \emptyset$.