

Tutorium zur Analysis I, 15. Nov. '24

- 1.) Teilfolge / Kompositionsabb. / B-W
Bsp. monotone Folge $\Leftrightarrow$ Kgt.
- 2.) lim inf / lim sup ausrechnen?
- 3.) div. $\Leftrightarrow$ best. div.

4.) Bsp. für Reihen

5.) Unterschied: abs. Kgt. $\Leftrightarrow$ Kgt.

Zu 1.) Teilfolge:

Geg. eine Folge $a: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{K}$.

Für $p: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, isoton
ist eine Teilfolge die

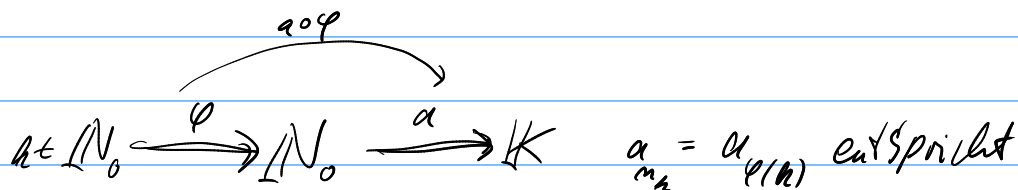
Folge $a_{p(0)}, a_{p(1)}, a_{p(2)}, \dots$

$p: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0: 0, 3, 10, 12, 100, \dots$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, \dots$
 $\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 Teilfolge: $a_0, a_3, a_{10}, a_{12}, a_{100}, \dots$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$

$a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$

Sei $n_k := p(k)$.



Bsp.: $a: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}, a(n) = 10^n$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$

Teilfolge: $\underline{10^2}, 10^4, 10^6, 10^8, \dots$

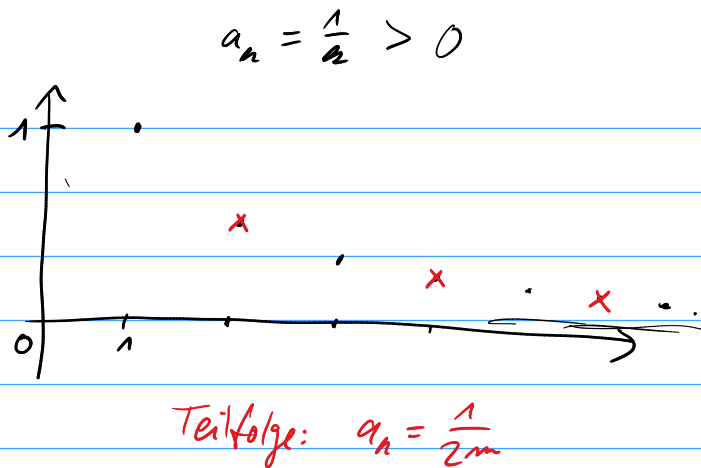
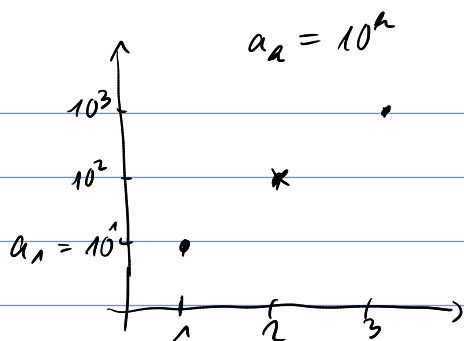
$a(p(k)) = \underbrace{a}_{\uparrow} \circ \underbrace{p}_{\uparrow}(k)$
 "a nach p"
 d.h. erst p anwenden, dann a

$\underbrace{a(p(m))}_{=} = a_{p(m)} = a_{2m+2} = 10^{2m+2}$ ist Teilfolge, $m \in \mathbb{N}_0$

Hier: $p: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, m \mapsto 2m+2$

$\boxed{m \mapsto 2m+2}$

-2-



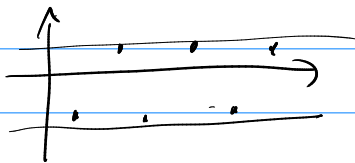
B-W: Jede $\mathbb{K}$ -wertige beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bsp.: $(-1)^n = a_n$ beschränkt, $n \in \mathbb{N}$

hat laut B-W konvergente Teilfolgen,

hier nämlich $(-1)^{2m} = ((-1)^2)^m = 1 \rightarrow 1 = \limsup a_n$
für alle $m \in \mathbb{N}$

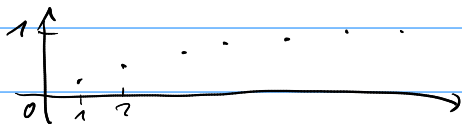
oder nämlich $(-1)^{2m+1} = -1 \rightarrow -1 = \liminf a_n$



→ haben 2 Häufungswerte, nämlich -1, 1

haben

→ Satz: (5.22): $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a isoton und n.o. beschr.
Dann ist a Kgt., und $\lim a_n = \sup \{a_j; j \in \mathbb{N}\}$.
⇒ geht ein in Kor. 6. bei Satz B-W Nr. 6.7.!



• $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ isoton,

da $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n

($\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq n+1$)

• a_n beschr., etwa durch die o.B. 1, denn: $\forall n: a_n \leq 1$

da $1 - \frac{1}{n} \leq 1$ ✓

• Also (5.22) folgt: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ist Kgt.

hier $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$.

-3-

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{3+5 \cdot 1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, a_3 = \frac{3+5 \cdot \frac{2}{5}}{20} = \frac{1}{4}, \dots$$

A3 von Bl. 5: $a_1 = 1, a_{n+1} := \frac{3+5a_n}{20}$ für $n \in \mathbb{N}$.

- 1.) $\forall n: a_n > \frac{1}{5}$ ✓ • a_n ist u.u. beschr. (v...)
 - 2.) (a_n) sind monoton • $\forall n: a_{n+1} \leq a_n$ (v...)
 - 3.) Also Kgt. (a_n) wegen 1. und 2. mit Satz 5.22
- sind die
Vor. von
5.22

$\Rightarrow$ Kgt. gegen $b \in \mathbb{R}$. Frage: was ist b ?

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n$$

$$\leadsto \boxed{b = \frac{3+5b}{20}}$$

(=)

$$20b = 3+5b$$

Bem. zu A5:
falls

$$a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n} > 0, a_n: \mathbb{N}_0 \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}_{>0}}}$$

$$(\Rightarrow) 15b = 3 \quad (\Rightarrow) b = \frac{1}{5}$$

✓



$$\alpha = \frac{2+\alpha}{1+\alpha} \quad (\Rightarrow) \alpha + \alpha^2 = 2 + \alpha \quad (\Rightarrow) \alpha^2 = 2$$

$$(\Rightarrow) \alpha = \sqrt{2} \vee \alpha = -\sqrt{2}$$

verwerfen!

Bei A5, 2.: $\forall n: |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{2}{4^n}$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = \left| \frac{2+a_{n+1}}{1+a_{n+1}} - \frac{2+a_n}{1+a_n} \right|$$

$$= \frac{\dots}{(1+a_n) \cdot (1+a_{n+1})} \stackrel{!}{\leq} \frac{2}{4^{n+1}}$$

↑

Bsp.: $a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ // $\forall n: \underline{\underline{a_n \neq 0}}$

$$a_1 = -1, a_2 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, a_3 = -3, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = -5, a_6 = -\frac{1}{6}, \dots$$

Haben: 0 ist H.W., da $a_{(2m)} = (-1)^m \cdot \frac{1}{2m}$ ist Teilfolge, $\rightarrow 0$.
ist größte H.W. ($\varphi(m) = 2m$ isotomie)

-4-

Beh.: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Bew.:
 • 0 ist H.W.,
 • 0 ist größte H.W. $\square$

$\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$ istoton

Bsp.: $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ $m \in \mathbb{N}_0$
 Haben: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\inf \{a_n; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} = \frac{1}{2} = \min \{a_n; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$$

$$\sup \{a_n; n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} = 1$$

$$a_n = \frac{n}{n+1} \leadsto a_0 = \frac{0}{1} = 0$$

$$\inf \{a_n; n \in \mathbb{N}_0\} = 0$$

$$\liminf_{0 \leq n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Bestimmte Div.:

$a_n \rightarrow +\infty$: $(\Leftrightarrow) \forall K \in \mathbb{R} \exists m_0 \forall n \geq m_0 : a_n \geq K$
 ab einem m_0 wird bel. Schranke K übertroffen

Bsp.: $a_n = n^2 : 1, 4, 9, 16, 25, \dots \rightarrow \infty$

$$\forall K \exists m_0 \forall n \geq m_0 : n^2 \geq K$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{z.B. } K=100 \leadsto \exists m_0 \forall n \geq m_0 : n^2 \geq 100 \\ (\Leftrightarrow) n \geq 10 \\ \rightarrow \text{Haben: } m_0 := 10 \end{array} \right]$$

best. Div. $\rightarrow +\infty, \rightarrow -\infty$

Div., nicht bestimmt div.: $a_n = (-1)^n$

Reihen:

Geg. Folge a , etwa $a_1, a_2, a_3, \dots$

dazugeh. Reihe

Partialsummen
bilden Folge
= Reihe

$$\begin{cases} a_1 = R_a(1) \\ a_1 + a_2 = R_a(2) \\ a_1 + a_2 + a_3 = R_a(3) \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = R_a(4) \\ \vdots \end{cases}$$

$$R_a(3) = R_a(2) + a_3 \quad \text{rekursive Version}$$

$$R_a(n) = a_n, \quad R_a(m+n) := R_a(n) + a_{m+n} \quad \text{rekursive Def. einer Reihe}, \quad m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

$a: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

Summanden der Reihe R_a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

→ Reihe:

$$\begin{aligned} 1 & \\ 1 + \frac{1}{2} &= 1.5 \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= 1.75 \\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= 1.875 \end{aligned}$$

↑
Folge von Partialsummen

$$\text{geom. } \sum \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$$\sum_{k=n}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

↑
 $k=1$

$$= \left(\frac{1}{1} \right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$