

Tutorium zur Analysis I, 22. Nov. '24

- ✓ 1. Cauchy-Konvergenz-Kriterium
- ✓ 2. Reihen-Konvergenzkriterien
- { 3. Cauchy-Produkt
- { 4. Doppelreihen/Doppelsummen
- ✓ 5. Reihenrestabsch. von exp

Zu 1.: Cauchy-Konvergenzkriterium für Folgen:

Geg. Folge (c_n) in $\mathbb{C}$.

$$(c_n) \text{ Kgt. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq m_0} : |c_n - c_m| < \varepsilon.$$

Cauchy-Konvergenzkriterium für Reihen:

Folge (a_n) in $\mathbb{C}$, betr. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dann. $\leadsto c_n = \sum_{i=0}^n a_i$, (c_n) Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ Kgt. } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq m_0} : \left| \underbrace{\sum_{i=0}^m a_i}_{c_m} - \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i}_{c_n} \right| < \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow m \geq n \Rightarrow \left| \sum_{i=n+1}^m a_i \right|$$

Version 1
Subst. $m = n+p$
 $p > n$

Nr. 7, 10: $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ Kgt. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m_0(\varepsilon) \forall m \geq m_0(\varepsilon) \forall p \in \mathbb{N} :$

$$\left| \sum_{j=m}^{m+p} a_j \right| < \varepsilon.$$

Version 2

Reihenrest, wenn $p \rightarrow \infty$

d.h. Reihenrest

$$= \sum_{j=m}^{\infty} a_j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Zu 2.): Konvergenzkriterien: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Kgt. / abs. Kgt.

alternierende
Reihen

Leibniz-Krit.: $a_n \geq 0$, a_n antiton, $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ Kgt.

Majorantenkrit.: $a_n \leq b_n$, $\sum b_n$ Kgt. $\Rightarrow \sum a_n$ Kgt. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$

Quotientenkrit.: s.u.

Wurzelkrit.: s.u.

Minorantenkrit.: $0 \leq a_n \leq b_n$, $\sum a_n$ div. $\Rightarrow \sum b_n$ div.

B-W $\Rightarrow$ 5.22: $(a_n) \in \mathbb{R}$, (a_n) isoton, n.o. beschr. $\Rightarrow (a_n)$ Kgt.

$(a_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ isoton), $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ n.o. beschr. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Kgt.

Folge $a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, \dots$

isoton

Leibniz-Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$

$\left| -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right| \leq \frac{1}{5} = \frac{1}{n+1}$ für $n=4$ Kgt. wegen Leibniz-Krit.

Reihenrest: $\left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n - \sum_{n=0}^m (-1)^n a_n \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_{m+1}$

Bem.: Auf Vor. "antiton" in Leibniz-Krit. Kann nicht verzichtet werden!

Bsp.: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, $c_{2m} = -\frac{1}{2^m}$, $c_{2m+1} = \frac{1}{m}$, $n \geq 1$ } alternierend, $\checkmark$ und $c_n \rightarrow 0$ $\checkmark$
nicht antiton!

Haben: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2m} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2m+1}$

$= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$

$= -\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -2$ div., da harmonische $\sum$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ div.

-3-

Zu 5.) : Reihenrestabsch. von exp:

sehr klein, falls $|z| < 1$

Sei $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\text{Dann: } \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| < \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2-|z|} \quad \boxed{|z| < n+2}$$

das $(n+1)$ -Folglied der Summandenfolge in Betrag

$q = \frac{|z|}{n+2} < 1$ in geom. Σ

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right|$$

D.h.: $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \boxed{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!}} + \underbrace{\frac{z^4}{4!} + \dots}_{\text{Reihenrest}}$

$n=3$

Hier: Reihenrest für $n=3$ ist $\left| \sum_{k=4}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| < \frac{|z|^4}{4!} \cdot \frac{5}{5-|z|}$

falls $|z| < 1$, ist dies sehr klein!

$e := \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \right) \right| < \frac{1}{4!} \cdot \frac{5}{5-1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4!} = 0.0521$

$n=3, z=1$

Beh.: $e^2 \stackrel{!}{=} \exp(2)$

$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$

$e^2 = e \cdot e = \exp(1) \cdot \exp(1) = \exp(1+1) = \exp(2)$ ✓

Beh.: $\forall n \geq 0 : e^n = \exp(n)$ ✓

de Moivre: $\exp^n(z) = \exp(nz)$ mit $z=1$ ✓

Wurzel Krit.: $\exists q \in \mathbb{R}_{>0}, q < 1 : \exists m, n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow \sum |a_n| \text{ kgt.}$

Bsp.: $\sum_{n \geq 1} \underbrace{\left(\frac{n}{4n+1} \right)^2}_{>0} \text{ kgt., da } a_n = \left(\frac{n}{4n+1} \right)^2$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n}{4n+1} \leq \frac{1}{4} < 1$ ✓
 $\Rightarrow 4n \leq 4n+1$ ✓

-4-

Quot. Krit.: $\exists q \in \mathbb{R}_{>0}, q < 1: \exists n_0 \forall n \geq n_0: \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \Rightarrow \sum |a_n| \text{ kgt.}$

Bsp.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot 2^n$ kgt. wegen Quot. Krit. mit $q = \frac{2}{e} + 0.001 < 1$.

$$\text{denn } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot 2^{n+1} \cdot \frac{n^n}{n! \cdot 2^n} = 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1} \right)^n}_{\text{Kürze } n}$$

$$= \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e} < 1 \quad \checkmark$$

$$\triangle! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \text{ laut (ii) B.5A2}$$

für fast alle n ist dies $\leq \frac{2}{e} + 0.001 < 1$
 $\underbrace{\quad}_{=: q} \quad \checkmark \quad \square$

Benutzt werde: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$

Laufindex $i = 0, \dots, m$

Zu 3./4.: Bsp.: $\sum_{i=0}^m a_i \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m-i} b_j \right)}_{=: c_i} = a_0 \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m-0} b_j \right)}_{\leftarrow i=0} + a_1 \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m-1} b_j \right)}_{\leftarrow i=1} + a_2 \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m-2} b_j \right)}_{i=2} + \dots + a_m \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m-m} b_j \right)}_{= b_0}$

$$= a_0 \cdot (b_0 + b_1 + \dots + b_m) + a_1 \cdot (b_0 + b_1 + \dots + b_{m-1}) + a_2 \cdot (b_0 + b_1 + \dots + b_{m-2}) + \dots + a_{m-1} \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{m-(m-1)} b_j \right)}_{= b_0 + b_1} + a_m \cdot b_0$$

Doppelsummen:

$$\sum_{i=0}^m a_i \sum_{j=0}^{m-i} b_j = a_0 \cdot \left(\sum_j b_j \right) + a_1 \cdot \left(\sum_j b_j \right) + \dots + a_m \cdot \left(\sum_j b_j \right) = \sum_j a_0 b_j + \dots + \sum_j a_m b_j = \sum_i \left(\sum_j a_i b_j \right) \quad \text{vertauschbar}$$

$$= \sum_j \sum_i a_i b_j = \sum_j b_j \sum_i a_i \quad \checkmark$$