

# Tutorium zur Analysis I, Kap. An 9

1)  $f(x) = x^2 + 1 = g(x) + h(x)$ ,  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = 1$

Bsp.:  $f(x) = \sqrt{2x^7 + 3} \rightsquigarrow x \xrightarrow{f_1} x^7 \xrightarrow{f_2} 2x^7 \xrightarrow{f_3} 2x^7 + 3 \xrightarrow{f_4} \sqrt{2x^7 + 3}$

Haben  $f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$ ,

also  $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^7$ ,  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ ,  $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+3$ ,

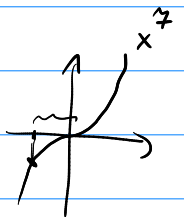
$f_4: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$

$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$

$D_f = \{x; 2x^7 + 3 \geq 0\} = \{x; x \geq -\sqrt[7]{\frac{3}{2}}\} = [-\sqrt[7]{\frac{3}{2}}, \infty[$ .

$2x^7 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^7 \geq -3 \Leftrightarrow x^7 \geq -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x \geq -\sqrt[7]{\frac{3}{2}}$



Bem.:  $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}; x^6 \geq -\frac{3}{2}\}$

Bem.:  $h(x) = 2x^7 + 3 = h_1(x) + h_2(x)$

$h_1(x) = 2x^7$ ,  $h_2(x) = 3$ , haben:  $h = h_1 + h_2$

Allg. Mengenabb.

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$

$f: \begin{array}{l} a_1 \mapsto b_2 \\ a_2 \mapsto b_3 \\ a_3 \mapsto b_1 \end{array}$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$g: \begin{array}{l} b_1 \mapsto c_2 \\ b_2 \mapsto c_3 \\ b_3 \mapsto c_1 \end{array}$

$g \circ f: A \rightarrow C$   
 $a_1 \mapsto c_3$   
 $a_2 \mapsto c_1$   
 $a_3 \mapsto c_2$

$f^{-1}: \begin{array}{l} B \rightarrow A \\ b_2 \mapsto a_1 \\ b_3 \mapsto a_2 \\ b_1 \mapsto a_3 \end{array}$

$g^{-1}: C \rightarrow B$ ,  $f^{-1}: B \rightarrow A$

$f^{-1} \circ g^{-1}: C \xrightarrow{g^{-1}} B \xrightarrow{f^{-1}} A$ , haben  $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$

Bsp.:  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x+1$ ,  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f \circ g(x) = (x+1)^2$ ,  $g \circ f(x) = x^2 + 1$   
 $f^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ,  $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x-1$   
 $f^{-1} \circ g^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $(g \circ f)^{-1} = \sqrt{x-1}$

-2-

Umkehrkt. von  $g \circ f(x) = x^2 + 1 = y$

$(\Rightarrow) x^2 = y - 1 \leadsto \boxed{x = \sqrt{y-1}}$  ← Umkehrkt  
 $x \mapsto y$   
 verstanden

2)  $\cos(z) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) = \text{r.ſ.}$

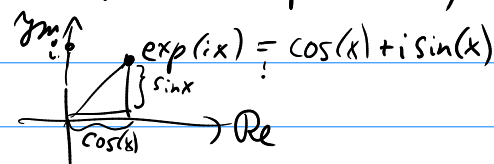
Bew.: Haben  $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$  ,  $z \in \mathbb{C}$

Also:  $\exp(-iz) = \exp(i \cdot (-z)) \stackrel{!}{=} \cos(-z) + i \sin(-z)$   
 $= \cos(z) - i \sin(z)$

Also: r.ſ.  $= \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) = \frac{1}{2}(\underbrace{\cos(z) + i \sin(z)} + \underbrace{\cos(z) - i \sin(z)})$   
 $= \frac{1}{2}(2 \cos(z) + 0) = \cos(z) = \text{r.ſ.}$

z.B.  $z = 10 \leadsto \cos(10) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}(\exp(10i) + \exp(-10i))$   $\square$   $i$ : imag. Einheit

$\cos(x)$   
 $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$



3)  $\leadsto$  Bsp. für 9.8:  $\varepsilon$ - $\delta$ -Def. für Stetigkeit

4) Konkretes Anwenden der Def. für Stetigkeit / Folgenstetigkeit

Zu 3): Hatten:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in D$   
 $f$  heißt stetig in  $a$ , falls

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Bsp.:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ , ist stetig  $a = 11$ , denn:

Sei  $\varepsilon > 0$  bel. vorgegeben.

Dazu passend sei  $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{24}, 1\}$ .

Dann  $|x-11| < \delta \Rightarrow |x+11| \stackrel{!}{=} |x-11+22| \stackrel{!}{\leq} \underbrace{|x-11|}_{< \delta} + 22 \leq \delta + 22 \leq 23$

$\Rightarrow |f(x) - f(11)| = |x^2 - 11^2| = |x+11| \cdot |x-11| \leq \underbrace{|x+11|}_{\leq 23} \cdot \delta \leq 23 \cdot \delta < \varepsilon$   $\checkmark$   
 da  $\delta < \frac{\varepsilon}{23}$   $\square$

-3-

Folgekrit.:  $f: D \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $a \in D$  ist stetig in  $a$   
(=)

$$\forall (x_n) \subseteq D, \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

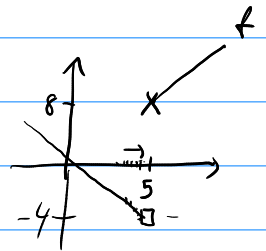
$$(\Rightarrow) \forall (x_n) \subseteq D, \underbrace{x_n \rightarrow a}_{!} \Rightarrow \underline{\underline{f(x_n) \rightarrow f(a)}}.$$

Hier im Bsp.:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ , ist stetig in  $a = 11$ ,

denn ist  $(x_n)$  bel. Folge mit  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 11$ ,

$$\text{dann gilt } f(x_n) = x_n^2 = x_n \cdot x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 11 \cdot 11 = 11^2 = f(11).$$

Bsp.:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 3+x, & x \geq 5 \\ 1-x, & x < 5 \end{cases}$   
ist stetig in  $a = 5$ ? nein



Beh.:  $f$  ist unstetig in  $a = 5$ , denn:

$$\neg \left( \forall (x_n) \subseteq D, x_n \rightarrow 5 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(5) \right) \\ (\Rightarrow) \exists \underbrace{x_n \subseteq D}_{\uparrow}, x_n \rightarrow 5 \wedge f(x_n) \not\rightarrow f(5) = 8,$$

denn betr.  $x_n := \underbrace{5 - \frac{1}{n}}_{< 5} \rightarrow 5$ , und haben

$$\underbrace{f(x_n)}_{x_n < 5} = 1 - x_n = 1 - \left(5 - \frac{1}{n}\right) = -4 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -4 \neq 8 \neq f(5).$$

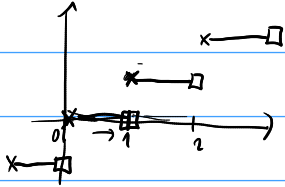
□

- 4 -

Bsp:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z}; z \leq x\}$

Großklammer

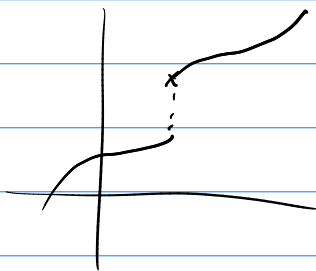
$$\lfloor 3.14 \rfloor = 3, \lfloor -5.3 \rfloor = -6$$



Sei  $a \in \mathbb{Z}$ . Dort ist  $f$  unstetig,

$$\text{denn } x_n = a - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a,$$

$$\text{aber } f(x_n) = \lfloor a - \frac{1}{n} \rfloor \underset{a \in \mathbb{Z}}{=} a - 1 \neq \lfloor a \rfloor = f(a).$$



z.B.:  $b = \max$   $f(x) = \frac{1}{x}, f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$   
Standardhyperbel

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0, \end{cases}$$

$g$  setzt  $f$  fort,

aber:  $g$  ist unstetig,

sogar: Keine stetige Fortsetzung möglich!

$b \in \mathbb{R}$  beliebig

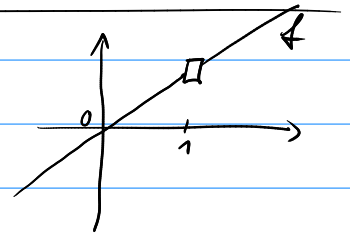
Bsp:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ b, & x = 1, \end{cases}$$

$b \in \mathbb{R}$  bel.

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow g(x_n) = \frac{1}{1/n} = n \not\rightarrow g(1) = b$$

Bsp:  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$   
 $\underset{x \neq 1}{\uparrow}$



$\leadsto$

Fortsetzen:  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1, & x \neq 1, \text{ d.h. } x \in D_f \\ 2 = g(1), & x = 1 \end{cases}$   
 $= D_f \cup \{1\}$   
also  $g(x) = x+1$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

-5-

Beh.:  $g$  ist stetig in  $a=1$ , also stetige Fortsetzung von  $f$   
Bew.:

Sei  $\underline{x_n} \rightarrow a=1$  bel. Dann

$$g(\underline{x_n}) = \underline{x_n} + \underline{1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{1} + \underline{1} = 2 = g(1). \quad \square$$

wegen GWSatz

Bsp.:  $f: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$$

ist st. forts'bar?

in  $x = -3$  ? ja

(u)

Bsp.:  $f: \mathbb{R} \setminus \{1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x-1)(x+2)}$$

ist st. forts'bar?

in  $x=1$ ,  $x=-2$  ?

st. forts'bar in  $x=1$  ✓ aber nicht in  $x=-2$  !

(be)heb'bare Stelle

Pol

(u)