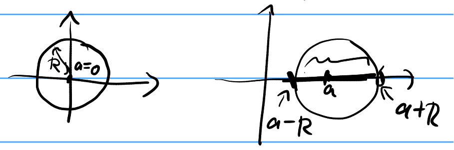
Tutorium zur Analysis I, letzte Sitzung

Themen: Potenzreihen, Satz von Taylor, uneigentliche Ie
→ Besprechung von Blatt 14

A1: Konvergenzradius berechnen: Geg. Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n = f(x)$

benutze die Formel

$$\frac{1}{R} = R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$



(a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^n x^n$, hier: $a_n = e^n \rightsquigarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{e^n} = e \xrightarrow{n\to\infty} e$,

Mittelpkt.: $a = 0$

also ex. $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = e$, also $R = \frac{1}{e}$.

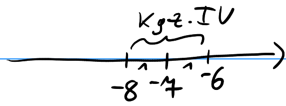
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} \cdot \underbrace{(x+7)^n}_{= x-(-7)}$, hier: $a_n = e^{\sqrt{n}} \rightsquigarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{e^{\sqrt{n}}} = \left(e^{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$\xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1$, da e^x stetig.

Mittelpkt.: $a = -7$

also ex. $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, also $R = 1$.

Konvergenzintervall: $]-8,-6[$



(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot (x-1)^n$, hier: $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n! \cdot n!}{2n \cdot (2n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

$2 \cdot n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = 2n! \neq (2n)! = (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n!}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n!\, n!}{2n(2n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}} = ?$ ...

besser: Quot.krit. benutzen $\rightsquigarrow R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ laut Vorl.

damit hier: $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)^2 (n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n)!(n+1)^2}$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$

$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} = 2 \cdot \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right) \longrightarrow 2 \cdot 2 = 4$

$2n+1 = n+1+n$ $\quad \frac{n+1}{n+1} \to 1$ $\quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$, $\frac{1}{n} \to 0$

Also: $R = 4$

A2) Für welche $x \in \mathbb{R}$ Konvergieren die Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^n (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^n (x-\underbrace{(-1)})^n$

$\llcorner a=-1$ ist Mittelpunkt

Kgz.radius: $R=\frac{1}{e}$ laut A1)(a) ✓

Also: Kgz. intervall ist $\left]-1-\frac{1}{e}, -1+\frac{1}{e}\right[$

Untersuche noch: Kgz. in $x_1=-1-\frac{1}{e}$ und $x_2=-1+\frac{1}{e}$:

In x_1: $\sum_{n=0}^{\infty} e^n\left(-1-\frac{1}{e}+1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \cdot \left(-\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{e^n \cdot e^{-n}}_{=1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ div.

In x_2: $\sum_{n=0}^{\infty} e^n\left(-1+\frac{1}{e}+1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \cdot \frac{1}{e^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$ div.

(b): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{=:a_n} \cdot (x-\underbrace{(-2)}_{a=-2})^n$ Mittelpkt.

für Kgz.radius: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1$, d.h. $R=1$

Kgz. IV: $]-2-1, -2+1[\; = \;]-3, -1[$

Sei: $x_1=-3$, $x_2=-1$.

In $x_1=-3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-3+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, div.

In $x_2=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \underbrace{(-1+2)^n}_{=1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ alternierende harmonische Reihe / Leibnizreihe Kgt. laut Leibniz

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{(-1)^n}{(2n)!}}^{=:a_n} (x^2)^n = \cos(x)$, Kgt. für alle $x \in \mathbb{R}$.

Potenzen $x^0, x^2, x^4, \ldots$ Kgz. IV: $]-\infty, \infty[$.

Kgz.radius: $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!}{(2n)!} = (2n+2)(2n+1) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Ergebnis: Kgz. auf $]-\infty, \infty[$.

A3: uneigentliche Integrale bestimmen:

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_2^T \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \frac{1}{2}$,

$x=1$ ist außerhalb $[2,T]$!

denn haben $\displaystyle\int_2^T \frac{1}{(x-1)^3}\,dx = \int_2^T (x-1)^{-3}\,dx = \frac{(x-1)^{-2}}{-2}\Big|_2^T$

$\displaystyle = \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(T-1)^2}}_{\to 0} + \frac{1}{2} \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

(b) $\displaystyle\int_2^{11} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+} \int_a^{11} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = 6$,

denn haben $\displaystyle\int_a^{11} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \int_a^{11} (x-2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{1/2}\Big|_a^{11}$

$\displaystyle = \frac{9^{1/2}}{1/2} - \frac{(a-2)^{1/2}}{1/2} = 6 - \underbrace{2\cdot\sqrt{a-2}}_{\to 0,\text{ da } \sqrt{\ } \text{ stetig}} \xrightarrow{a\to 2+} 6$

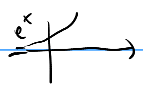
c) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_0^T x e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}$,

$f(x)=e^x$, $\varphi(x) = -x^2$

denn haben $\displaystyle\int_0^T x \underbrace{e^{-x^2}}_{f(\varphi(x))}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^T \underbrace{(-2x)}_{\varphi'(x)} \underbrace{e^{-x^2}}_{f(\varphi(x))}\,dx \overset{\text{Subst.}}{=} -\frac{1}{2}\int_0^{-T^2} e^u\,du$

(innere Abl. bis auf Faktoren) $\displaystyle\left(\int_a^b \varphi'(t)\cdot f(\varphi(t))\,dt \underset{\text{Subst.}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du\right)$

$\displaystyle = +\frac{1}{2}\cdot\int_{-T^2}^0 e^u\,du = \frac{1}{2}\cdot e^u\Big|_{-T^2}^0 = \frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{2}e^{-T^2}$



$\displaystyle = \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}e^{-T^2}}_{\to 0} \xrightarrow{T\to\infty} \frac{1}{2}$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \arcsin(x)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$. $\square$

(Bsp. 20.2.a) arcsin stetig

A5) : Taylorentwicklung: $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$f(x) = \ln(\underbrace{\cos(x)}_{\text{hier } >0})$ ✓

Entw. bei $a=0$

bis zu $P_2(x)$, das 2. Taylorpolynom:

Herleitung: $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$

$$\overset{a=0}{=} \underline{\underline{f(0)}} + \underline{\underline{f'(0)}}\,x + \underline{\underline{\frac{f''(0)}{2!}}}\,x^2$$

Haben: $f(0) = \ln(\cos(0)) = \ln(1) = \underline{\underline{0}}$

$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\text{innere}} \rightsquigarrow f'(0) = 1 \cdot (-\sin 0) = \underline{\underline{0}}$

$f''(x) = \frac{-\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{-1}{\cos^2(x)} \rightsquigarrow f''(0) = \underline{\underline{-1}}$

Also: $P_2(x) = \underline{\underline{-\frac{x^2}{2}}}$.

b) Haben $f(x) - P_2(x) = R_2(x)$ als 2. Restglied,

haben $R_2(x) = f^{(3)}(\xi) \cdot \frac{x^3}{3!}$ laut Lagrange

haben $f'''(x) = \ldots = -2\,\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} \rightsquigarrow |f'''(\xi)| \le 2 \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$

$\le 2 \cdot \tan(\frac{\pi}{4}) \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4})}}_{=2} = \underline{\underline{4}}$.

auf $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, tan isoton, $\frac{1}{\cos^2(x)}$ isoton, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Also:

$$|R_2(x)| \le \frac{4}{3!} \cdot x^3 = \underline{\underline{\frac{2}{3} x^3}} \text{ auf } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}.$$

sehr klein, wenn x nahe 0

A4)

1. ptw./glm. Konvergenzuntersuchung:

a) $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^2}{1+n^2x^2}$ (ist ≥ 0).

• ptw. Kgz.: halte $x\in\mathbb{R}$ fest,
dann $f_n(x)=\frac{x^2}{1+n^2x^2} = x^2\cdot \overbrace{\frac{1}{n^2x^2+1}}^{\xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ wenn } x\neq 0} \xrightarrow{n\to\infty} \left.\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 0\cdot 1, & x=0\end{cases}\right\} = 0$,

d.h. die (punktweise) Grenzfunktion ist $f:=0$ (konstant 0).

• glm. Kgz. auf $\mathbb{R}$ (notwendig gegen $f=0$):
$$\|f_n-f\|=\|f_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ \text{OE } x\neq 0}} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$
haben $\frac{1}{\frac{1}{x^2}+n^2}\leq\frac{1}{n^2}$ für alle $x\neq 0$,
denn $n^2\leq \frac{1}{x^2}+n^2 \Leftarrow 0\leq\frac{1}{x^2}$ ✓.

also gilt $f_n \rightrightarrows f=0$.

b): $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$

• ptw. Kgz.: Sei $x\in[0,1]$ gegeben. Dann: $f_n(x)=\frac{2x}{\frac{1}{n^2}(1+2n^2x^2+n^4x^4)} = \frac{2x}{\frac{1}{n^2}+2x^2+n^2x^4} \xrightarrow{n\to\infty} 2x\cdot 0 = \underline{\underline{0=f}}$,
die Folge kgt. also ptw. gegen $f=0$ (konstant 0).

• glm. Kgz.: $\|f_n-f\|=\|f_n\|=\sup_{x\in[0,1]}\frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} \leq \frac{2n^2}{\underbrace{(1+n^2)^2}_{=g(1)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, also $f_n \rightrightarrows f$. ✓

$g(x)=\frac{1}{(1+n^2x^2)^2}$ isoton

2. Geg.: $f_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_j(x)=\frac{1}{x^2+j^2}$ für $j\in\mathbb{N}$.
Beh.: $\left(\sum_{j=1}^{n} f_j\right)_n$, d.h. $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$, ist glm. kgt.

Bew.: Für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt $\frac{1}{x^2+j^2}\leq\frac{1}{j^2}$ (mit $j\in\mathbb{N}$),
also gilt mit $\gamma_j:=\frac{1}{j^2}>0$, dass $\|f_j\|\leq\gamma_j=\frac{1}{j^2}$,
wobei $\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}$ kgt. (laut Vorlesung, vgl. z.B. 20.12.(1) mit $\alpha=2$).
Laut dem Weierstraß-Majorantenkrit. für glm. Kgz. von Reihen, Nr. 18.11, folgt die gleichmäßige Kgz. □

Bem.: Über die Werte der Grenzfunktion kann so nicht mehr gesagt werden, außer dass $f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+j^2}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Um f vielleicht anders auszudrücken, wäre mehr Wissen/Herleitung erforderlich.