# Tutorium (Mitschrift vom 08.11.2024)

**Aufgabe 1.** Die Folgen $(a_n)$, $(b_n)$, $(c_n)$ und $(d_n)$ seien gegeben durch

$$a_n = \frac{2n^2 - 3n}{3n^3 + 17n}, \quad b_n = \frac{2n^2 - 600n + 7}{5n^2 + 10^8 n + 7}, \quad c_n = \frac{n^3 + 2n - 1}{7n^2 + 4n + 5}, \quad d_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{2n^2+1}$$

Wir möchten die Folgen auf Konvergenz bzw. Divergenz überprüfen und gegebenenfalls den Grenzwert bestimmen. Mit Hilfe der Rechenregeln für Grenzwerte (vgl. 5.25) erhalten wir

$$a_n = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{17}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{17}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0-0}{3+0} = 0,$$

$$b_n = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{2 - \frac{600}{n} + \frac{7}{n^2}}{5 + \frac{10^8}{n} + \frac{7}{n^2}} = \frac{2 - \frac{600}{n} + \frac{7}{n^2}}{5 + \frac{10^8}{n} + \frac{7}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2-0+0}{5+0+7} = \frac{2}{5}.$$

Ferner gilt

$$c_n \geq \frac{n^3}{7n^2 + 4n^2 + 5n^2} = \frac{n}{16}.$$

Damit gibt es zu jedem $K > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ (nämlich $N = 16K$) so, dass $c_n \geq K$ für alle $n \geq N$. Also ist die Folge $(c_n)$ unbeschränkt und damit divergent. Bleibt noch die Folge $(d_n)$ zu betrachten. Es gilt $|(-1)^n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge $((-1)^n)$ beschränkt. Da außerdem

$$\frac{n-1}{2n^2+1} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0-0}{2+0} = 0.$$

Also ist die Folge $(d_n)$ das Produkt einer beschränkten Folge und einer Nullfolge. Nach 5.12(3) ist $(d_n)$ damit auch eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

---

**Aufgabe 2.** Die Folge $(a_n)$ sei gegeben durch $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$. Wir möchten die Folge $(a_n)$ auf Konvergenz bzw. Divergenz überprüfen und gegebenenfalls den Grenzwert bestimmen. Es gilt

$$0 \leq \sqrt{n^2+1} - n = \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Aus dem Sandwichlemma (vgl. 5.26(e)) folgt nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - n = 0.$$

**Aufgabe 3.** Die Folge $(a_n)$ sei gegeben durch

$$a_n = \frac{5n^3 + 7n^2}{2n(n+1)(n+27)}.$$

Wir möchten die Folge $(a_n)$ auf Konvergenz bzw. Divergenz überprüfen und gegebenenfalls den Grenzwert bestimmen. Es ist

$$a_n = \frac{5n^3 + 7n^2}{2n(n+1)(n+27)} = \frac{5n^3 + 7n^2}{2n^3 + 56n^2 + 54n} = \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{5 + \frac{7}{n}}{2 + \frac{56}{n} + \frac{54}{n^2}} = \frac{5 + \frac{7}{n}}{2 + \frac{56}{n} + \frac{54}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{5}{2}.$$

---

**Aufgabe 4.** Die Folge $(a_n)$ sei gegeben durch

$$a_n = \frac{n^2+1}{n+1} - \frac{n^2+2}{n+2}.$$

Wir möchten die Folge $(a_n)$ auf Konvergenz bzw. Divergenz überprüfen und gegebenenfalls den Grenzwert bestimmen. Es ist

$$a_n = \frac{(n^2+1)(n+2) - (n^2+2)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 - n}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

---

**Aufgabe 5.** Die Folge $(a_n)$ sei gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k.$$

Wir möchten die Folge $(a_n)$ auf Konvergenz bzw. Divergenz überprüfen und gegebenenfalls den Grenzwert bestimmen. Mit 1.23 und den Rechenregeln für Grenzwerte (vgl. 5.25) erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

---

Auf dem aktuellen Übungsblatt wird gezeigt, dass für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $-1 < q < 1$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0. \tag{T.1}$$

**Aufgabe 6.** Die Folge $(a_n)$ sei gegeben durch

$$a_n = \frac{4^n - n^{800}}{3^n n^{100} - 4^n}.$$

Wir möchten die Folge $(a_n)$ auf Konvergenz bzw. Divergenz überprüfen und gegebenenfalls den Grenzwert bestimmen. Mit (T.1) und den Rechenregeln für Grenzwerte (vgl. 5.25) erhalten wir

$$a_n = \frac{4^n}{4^n} \cdot \frac{1 - n^{800}(\frac{1}{4})^n}{n^{100}(\frac{3}{4})^n - 1} = \frac{1 - n^{800}(\frac{1}{4})^n}{n^{100}(\frac{3}{4})^n - 1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-0}{0-1} = -1.$$

**Aufgabe 7.** Die Folge $(a_n)$ sei gegeben durch

$$a_n = \frac{n^4 4^n - 3^n n^7}{3^n + 4^n + 5^n}.$$

Wir möchten die Folge $(a_n)$ auf Konvergenz bzw. Divergenz überprüfen und gegebenenfalls den Grenzwert bestimmen. Mit (T.1) und den Rechenregeln für Grenzwerte (vgl. 5.25) erhalten wir

$$a_n = \frac{5^n}{5^n} \cdot \frac{n^4(\frac{4}{5})^n - n^7(\frac{3}{5})^n}{(\frac{3}{5})^n + (\frac{4}{5})^n + 1} = \frac{n^4(\frac{4}{5})^n - n^7(\frac{3}{5})^n}{(\frac{3}{5})^n + (\frac{4}{5})^n + 1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0-0}{0+0+1} = 0.$$

---

**Aufgabe 8.** Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{T.2}$$

*Beweis.* Für $a = 1$ ist die Behauptung klar. Als nächstes betrachten wir den Fall, dass $a > 1$. Dann ist $x_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a = (1 + x_n)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung (vgl. 2.10(14)) folgt, dass $a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt

$$0 < x_n \leq \frac{a-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Aus dem Sandwichlemma (vgl. 5.26(e)) folgt nun, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Bleibt der Fall $0 < a < 1$ zu betrachten. Dann ist $1/a > 1$ und aus dem ersten Fall folgt

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

Es folgt die Behauptung. □

---

**Aufgabe 9.** Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y \geq 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = \max\{x, y\}.$$

*Beweis.* Sei o.B.d.A. $x \geq y$. Dann gilt

$$x = \sqrt[n]{x^n} \leq \sqrt[n]{x^n + y^n} \leq \sqrt[n]{2x^n} = \sqrt[n]{2} \cdot x$$

Nach (T.2) ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Aus dem Sandwichlemma (vgl. 5.26(e)) folgt nun, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = x = \max\{x, y\}$. □

**Aufgabe 10.** Sei $(a_n)$ rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 2}. \quad (n \in \mathbb{N})$$

Wir überprüfen die Folge $(a_n)$ auf Konvergenz und bestimmen gegebenenfalls den Grenzwert.

1. *Beh.*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > 0$.

   *Beweis.* Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist $a_1 = 1 > 0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$. Dann ist $a_{n+1} = a_n/(a_n + 2) > 0$. □

2. *Beh.*: Die Folge $(a_n)$ ist antiton.

   *Beweis.* Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{a_n + 2} \overset{1.}{<} \frac{1}{2} < 1.$$

   Damit ist $a_{n+1} < a_n$. □

3. Da die Folge $(a_n)$ antiton und nach unten beschränkt (durch 0) ist, konvergiert sie nach 5.23. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Mit der Rekursionsvorschrift und den Rechenregeln für Grenzwerte (vgl. 5.25) erhalten wir

   $$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + 2} = \frac{a}{a + 2}.$$

   Somit gilt $a(a + 2) = a$, d.h. $a(a + 1) = 0$. Also ist $a = 0$ oder $a = -1$. Da $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt $a \geq 0$ und somit $a = 0$.

*Bemerkung.* Sei $(a_n)$ wie in Aufgabe 10. Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1} - 1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit folgt sofort, dass die Folge $(a_n)_n$ gegen 0 konvergiert.

---

**Aufgabe 11.** Sei $(a_n)$ rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1. \quad (n \in \mathbb{N})$$

Wir überprüfen die Folge $(a_n)$ auf Konvergenz und bestimmen gegebenenfalls den Grenzwert.

1. *Beh.*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n < 2$.

   *Beweis.* Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist $a_1 = 1 < 2$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n < 2$. Dann ist $a_{n+1} = a_n/2 + 1 < 2/2 + 1 = 2$. □

2. *Behauptung*: Die Folge $(a_n)_n$ ist (streng) isoton.

   *Beweis.* Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

   $$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + 1 - a_n = 1 - \frac{a_n}{2} \overset{2.}{>} 1 - \frac{2}{2} = 0.$$

   Damit ist $a_{n+1} > a_n$. □

3. Da die Folge $(a_n)_n$ (streng) isoton und nach oben beschränkt (durch 2) ist, konvergiert sie nach 5.22. Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Mit der Rekursionsvorschrift und den Rechenregeln für Grenzwerte (vgl. 5.25) erhalten wir

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2} + 1\right) = \frac{a}{2} + 1.$$

Somit gilt $a = 2$.

*Bemerkung.* Sei $(a_n)$ wie in Aufgabe 11. Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass

$$a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit folgt sofort, dass die Folge $(a_n)$ gegen 2 konvergiert.

---

**Aufgabe 12.** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

*Beweis.* Mit vollständiger Induktion lässt sich zeigen, dass $(n/4)^n \leq n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{(n/4)^n}} = \frac{4}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Aus dem Sandwichlemma (vgl. 5.26(e)) folgt nun die Behauptung. □

---

**Aufgabe 13.** Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

*Beweis.* Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Dann ist $n = (1 + x_n)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, dass

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x_n^2.$$

Daraus folgt $n - 1 \geq n(n-1)/2 \cdot x_n^2$ und somit $0 \leq x_n \leq \sqrt{2/n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Aus dem Sandwichlemma (vgl. 5.26(e)) und Aufgabe 5.1 von Übungsblatt 4 folgt nun $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. □