Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
WS 24/25

Analysis I

Blatt 0

Abgabe: Keine Abgabe

Besprechung: In den Übungen am 15.10. und 16.10.

Aufgabe 1. 1. Formulieren Sie die logischen Negationen der Aussagen

(a) „In jeder Stadt gibt es mindestens eine Straße, die für alle Fahrzeuge gesperrt ist.“

(b) „Mindestens einer der beiden Studierenden Paul und Ben ist verheiratet“.

2. Zeigen Sie, dass aus (der falschen Aussage) $1 = 2$ folgt, dass Ihre Oma der Papst ist.

Aufgabe 2. Seien $U, V \subseteq \mathbb{N}$ gegeben durch $U = \{1, 2, 3\}$ und $V = \{2, 4\}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) $U \in V$	(b) $\{2\} \in V$	(c) $2, 4 \in V$	(d) $V = \{2, 4, 2, 2\}$
(e) $3 \notin U$	(f) $1 \in V$	(g) $U = V$	(h) $V \ni 2$
(i) $\{2, 3\} \subseteq U$	(j) $U \subseteq V$	(k) $V \setminus U = \{4\}$	(l) $U \cap V = 3$
(m) $2 \subseteq U$	(n) $\{2, \{2, 3\}\} \subseteq U$	(o) $U \cap V \ni 4$	(p) $U \neq V$
(q) $U \cap V = \{1, 3\}$	(r) $\emptyset \in U$	(s) $V \supseteq \emptyset$	(t) $x \in U \wedge x \in V \Rightarrow x = 2$.

Aufgabe 3. 1. Gegeben seien die Mengen $I = \{2, 3, 5\}$, $J = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 2\}$ und $K = \{e, \pi\}$. Bestimmen Sie die folgenden Mengen, indem Sie jeweils alle Elemente auflisten:

(a) J (b) $I \cup J$ (c) $I \cap J$ (d) $I \setminus J$ (e) $I \times K$ (e) $\mathcal{P}(K)$.

2. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(a) $\mathcal{P}(\{1, 3\})$ (b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$ (c) $\mathcal{P}(\{1\}) \times \mathcal{P}(\{3\})$.

3. Seien A, B, C beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Aufgabe 4. 1. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.

(a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}, 1 \mapsto b, 2 \mapsto d, 3 \mapsto c$.

(b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (y, x)$.

(c) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + 2y$.

(d) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto xy$.

(e) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$.

2. Seien X, Y beliebige Mengen und $f : X \to Y$ eine injektive Abbildung. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

   (a) Zu jedem $y \in Y$ existiert genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

   (b) Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ mit $f(x) = y$.

   (c) Für jedes $y \in Y$ ist die Urbildmenge von $\{y\} \subseteq Y$ leer oder einelementig.

   (d) Die Abbildung $f : X \to f(X) \subseteq Y$ besitzt eine Umkehrabbildung.

   (e) Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, so gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.