

Analysis I

Blatt 1

Abgabe: Bis Freitag, den 18.10.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 22.10. und 23.10.

Aufgabe 1 (2 Punkte). 1. Formulieren Sie die logische Negation der Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

2. Denken Sie sich eine wahre Aussage der Form

$$\forall \text{ [rot] } \exists \text{ [grün] } : \text{ [blau] }$$

aus, so dass die Aussage

$$\exists \text{ [grün] } \forall \text{ [rot] } : \text{ [blau] }$$

auch wahr ist. In Kästchen der gleichen Farbe sollen gleiche Formeln stehen.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Seien A, B, C beliebige Mengen.

1. Zeigen Sie durch die Angabe eines konkreten Beispiels, dass im Allgemeinen

$$A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C.$$

2. Zeigen Sie:

(a) $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(b) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

(c) $A = B \iff A \cup B = A \cap B$.

(d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität. Begründen Sie Ihre Antworten. Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrabbildung an.

$$(a) f(n) = n + 7, \quad (b) f(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n + 1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad (c) f(n) = \begin{cases} n, & \text{falls } n \leq 10 \\ n - 1, & \text{falls } n > 10. \end{cases}$$

Bestimmen Sie ferner für jede der drei Abbildungen jeweils

$$f^{-1}(\{2, 3\}), \quad f^{-1}(\{2\}), \quad f^{-1}(\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\}).$$

Aufgabe 4 (3 Punkte). Seien X, Y beliebige Mengen, $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subseteq Y$.

1. Zeigen Sie, dass $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ gilt.
2. Geben Sie durch die Angabe konkreter Mengen $X, Y, A \subseteq Y$ und der Funktion $f : X \rightarrow Y$ ein Beispiel für den Fall $f(f^{-1}(A)) = A$ an.
3. Geben Sie durch die Angabe konkreter Mengen $X, Y, A \subseteq Y$ und der Funktion $f : X \rightarrow Y$ ein Beispiel für den Fall $f(f^{-1}(A)) \neq A$ an.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb). Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ die Anzahl der Möglichkeiten, zwei Elemente aus der Menge mit n Elementen auszuwählen,

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

beträgt.

Allgemeine Informationen:

1. Die Übungsblätter werden in der Regel aus fünf Aufgaben bestehen. Dabei gibt es zwei Arten von Aufgaben, die verschieden bewertet werden:
 - (a) Die ersten vier Aufgaben sind stets *Verständnis-Aufgaben* (16 Punkte pro Blatt). Hier wird auf bei jedem Aufgabenteil bewertet, ob Ihre Bearbeitung sinnvoll (mit "1" bewertet) ist oder nicht (mit "0" bewertet). Hierbei ist eine sinnvolle Bearbeitung nicht mit einer vollständigen oder nahezu vollständigen Lösung gleichzusetzen, sondern auch gute Ideen/Ansätze werden als sinnvolle Bearbeitungen gewertet.
 - (b) Die fünfte Aufgabe ist stets eine *Aufgabe zum präzisen Aufschrieb* (4 Punkte pro Blatt), d.h. die Bewertung dieser fünften Aufgabe erfolgt dann auf die klassische Art und Weise. Die Korrektor*innen erhalten ein festes Bewertungsschema, wonach diese die Punkte in Abhängigkeit Ihres Lösungsvorschlags vergeben werden. Bewertet wird also, ob Sie die Lösung formal richtig aufgeschrieben haben.
2. Abgaben von mehr als einer Person sowie verspätete Abgaben werden **nicht** korrigiert.
3. Die Abgabe erfolgt als **eine** (!!!) PDF-Datei.
4. Bitte verwenden Sie bei der Benennung der Datei, die Sie hochladen, das Format
$$\text{blattXX_nachname_vorname.pdf},$$
wobei XX für die Nummer des Blattes steht, also etwa $\text{XX} = 01$ oder $\text{XX} = 11$.
5. Bitte vermerken Sie die Nummer des Übungsblattes sowie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich lesbar auf der ersten Seite Ihrer Abgabe und lassen Sie dort genügend Raum zur Eintragung der Ergebnisse.
6. Eine Kurzanleitung zum Abgeben der Lösungen im Ilias finden Sie auf unserer Homepage

https://www.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Ana1_WiSe2425/

sowie auf der ILIAS-Seite im Verzeichnis „Übungen“.