Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
WS 24/25

Analysis I

Blatt 2

Abgabe: Bis Freitag, den 25.10.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 29.10.24 und 30.10.24

Aufgabe 1 (1 Punkt)**.** Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $q \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Zeigen Sie jeweils mit vollständiger Induktion:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$
3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ gilt
$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$
4. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_k \leq b_k$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt
$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k.$$
5. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots b_n \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \{0, \ldots, n\}$ gilt
$$\prod_{k=0}^{n} a_k \leq \prod_{k=0}^{n} b_k.$$
(*Hinweis*: Hier dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass $\prod_{k=0}^{n} b_k \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist.)

Aufgabe 3 (1 Punkt)**.** Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und n positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ so, dass $a_i a_{i+1} > 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $a_n a_1 > 1$. Zeigen Sie, dass das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ auch größer als 1 ist. (*Hinweis*: Betrachten Sie $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^2$.)

Aufgabe 4 (9 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) $4 - x < 3 - 2x$	(b) $5 - x^2 < -2$	(c) $(x-4)(x+5)(x-3) > 0$
(d) $x^2 + x + 1 > 2$	(e) $\lvert x-3\rvert < 8$	(f) $\lvert x-1\rvert + \lvert x-2\rvert > 1$
(g) $\lvert x-1\rvert + \lvert x+1\rvert < 2$	(h) $\lvert x-1\rvert \cdot \lvert x+1\rvert = 0$	(i) $\lvert x-1\rvert \cdot \lvert x+1\rvert = 3$.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Zeigen Sie:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}.$$
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3.$$