

Analysis I

Blatt 3

Abgabe: Bis Freitag, den 01.11.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 05.11.24 und 06.11.24

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

1. Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
2. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$(a) \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}, \quad (b) \sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = \begin{cases} -1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

1. Jede nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Minimum.
2. Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ und m ein Maximum von M . Dann ist m auch ein Supremum von M .
3. Jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt höchstens ein Supremum.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der folgenden Mengen:

$$(a) \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}, \quad (b) \left\{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \quad (c) \left\{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \quad (d) \left\{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte). Gegeben sei die Menge $A = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (1P.)
2. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (1P.)
3. Bestimmen Sie alle unteren und alle oberen Schranken der Menge A . (2P.)
4. Bestimmen Sie $\sup(A)$ und $\inf(A)$. (1P.)
5. Untersuchen Sie, ob die Menge A ein Maximum bzw. Minimum besitzt und bestimmen Sie diese gegebenenfalls. (1P.)

BITTE WENDEN!

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb). Sei M eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Die Menge $-M := \{-a \mid a \in M\}$ ist nach unten beschränkt und es gilt $\inf(-M) = -\sup(M)$.
2. Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ die Menge aller oberen Schranken von M . Dann ist S nach unten beschränkt und es gilt $\inf(S) = \sup(M)$.