

# Analysis I

## Blatt 4

Abgabe: Bis Freitag, den 08.11.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 12.11.24 und 13.11.24

---

### Aufgabe 1 (5 Punkte).

1. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(a) (1-i)^2 \overline{(1+2i)}, \quad (b) \frac{(1-i)^5}{(1+i)^3}.$$

2. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil aller komplexer Zahlen  $z$ , für die gilt:

$$(a) z^2 = 1 + 2i, \quad (b) z^3 = 8, \quad (c) z^3 = -8.$$

### Aufgabe 2 (6 Punkte). Fertigen Sie Skizzen der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ an:

$$\begin{array}{ll} (a) \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} = -z\} & (b) \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 3 \cdot \operatorname{Im}(z)\} \\ (c) \{z \in \mathbb{C} \mid |2z - 3| < 1\} & (d) \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |z + i|\} \\ (e) \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2i| = |\bar{z} - 2i|\} & (f) \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^2) > 0\}. \end{array}$$

### Aufgabe 3 (1 Punkt). Seien $z, w \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

### Aufgabe 4 (4 Punkte).

1. Zeigen Sie nur mit Definition 5.8, dass die folgenden Folgen  $(a_n)$  jeweils Nullfolgen sind:

$$(a) a_n = \frac{2025}{n^2}, \quad (b) a_n = \frac{2n+1}{5n+2} - \frac{2}{5}, \quad (c) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

2. Sei  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen  $n \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\frac{i}{\sqrt{n}} \in \mathcal{U}_0^\varepsilon.$$

### Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb).

1. Sei  $(a_n)$  eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen und sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \geq 0$ . Zeigen Sie: Ist  $(a_n - a)$  eine Nullfolge, so ist  $(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})$  eine Nullfolge.

2. Sei  $(a_n)$  eine Folge reeller Zahlen und sei  $a \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie: Ist  $(a_n - a)$  eine Nullfolge, so ist

$$\left( \frac{1}{n} \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) - a \right)$$

eine Nullfolge.