Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
WS 24/25

Analysis I

Blatt 5

Abgabe: Bis Freitag, den 15.11.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 19.11.24 und 20.11.24

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden konvergenten Folgen (a_n):

$$(a)\ \ a_n = \frac{2n^2 - 400}{5n^2 - 6n + 7}, \quad (b)\ \ a_n = \frac{n^2+2}{n+1} - \frac{n^2+2}{n+2}, \quad (c)\ \ a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k, \quad (d)\ \ a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Die Folgen $(a_n), (b_n)$ seien gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{und} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Zeigen Sie:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq b_n$.
2. Die Folge (a_n) ist isoton und die Folge (b_n) ist antiton.
3. Die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Die rekursiv definierte Folge (a_n) sei gegeben durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{3 + 5a_n}{20} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Zeigen Sie, dass $a_n > \frac{1}{5}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) antiton ist.
3. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.**

1. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $-1 < q < 1$. Zeigen Sie, dass die Folge (nq^n) beschränkt ist.
2. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $-1 < q < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} n^k q^n = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.
3. Seien $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 b_1^n + a_2 b_2^n + \ldots + a_k b_k^n}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Die rekursiv definierte Folge (a_n) sei gegeben durch

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Zeigen Sie, dass $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $|a_{n+1} - a_n| \leq \dfrac{2}{4^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.
3. Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) eine Cauchyfolge ist.
4. Folgern Sie, dass die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.