

Analysis I

Blatt 6

Abgabe: Bis Freitag, den 22.11.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 26.11.24 und 27.11.24

Aufgabe 1 (3 Punkte). Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden konvergenten Folgen (a_n) :

$$(a) \ a_n = \frac{\sqrt[3]{7}n^{10}2^n - 3^{n+1}\sqrt[3]{n}}{3^n + 2^n n^{10}} \quad (b) \ a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n, \quad (c) \ a_n = \frac{b^n}{n!} \quad (b \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte). Die \mathbb{R} -wertigen Folgen (a_n) und (b_n) seien gegeben durch

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

1. Bestimmen Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ nur mit Definition 6.15.
2. Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge (b_n) .
3. Bestimmen Sie $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Die \mathbb{R} -wertigen Folgen (a_n) und (b_n) seien gegeben durch

$$(a_n) = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots), \quad (b_n) = (2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots).$$

Bestimmen Sie

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte).

1. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

2. Bestimmen Sie den Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

3. Zeigen Sie mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ konvergiert.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb). Seien $(a_n), (b_n)$ beschränkte \mathbb{R} -wertige Folgen. Zeigen Sie:

1. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n,$

2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$