Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
WS 24/25

Analysis I

Blatt 7

Abgabe: Bis Freitag, den 29.11.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 03.12.24 und 04.12.24

Aufgabe 1 (11 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{\sqrt{n!}}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!2^n}{n^n}$ (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3+4i}{6}\right)^n$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^{-n}$

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}\binom{n}{2}$ (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+5^n}$ (k) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie mit 7.21 und 7.28, dass für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n+1}$. Zeigen Sie, dass das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ der konvergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert (*Hinweis*: Zeigen Sie, dass (c_n) keine Nullfolge ist und benutzen Sie dann 7.11).

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(n+1)$ konvergent und sei $a = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(n+1)$ ihr Grenzwert.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von 7.13, dass $a \neq 0$ ist.

(b) Wir ordnen die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(n+1)$ nun so um, dass auf ein positives Folgeglied stets zwei negative Folgenglieder folgen, d.h. wir betrachten die Reihe

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)+\ldots.$$

Zeigen Sie, dass die umgeordnete Reihe konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ und $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.

(b) $\cos x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$ und $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$.