

Analysis I

Blatt 8

Abgabe: Bis Freitag, den 06.12.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 10.12.24 und 11.12.24

Aufgabe 1 (10 Punkte).

1. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$. Zeigen Sie nur mit Definition 9.8, dass die Funktion f stetig in $a = -1$ ist.
2. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie nur mit Definition 9.8: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $|f|$ stetig.
3. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $|f(x) - f(y)| \leq 17\sqrt{|x - y|}$ für alle $x, y \in D$ gilt. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
4. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren $\min\{f, g\} : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.
 - (a) Zeigen Sie, dass $\min\{f, g\}(x) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$ für alle $x \in D$.
 - (b) Zeigen Sie: Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Funktion $\min\{f, g\}$ stetig.
5. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton in D . Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
6. Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_k stetig ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei $b \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktion $f_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_b(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{falls } x \neq 1, \\ b, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f_b nicht stetig in $a = 1$ ist.

Aufgabe 3 (1 Punkt). Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - 1 - \frac{x^2}{1+x^2}$$

mindestens eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Ein $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Fixpunkt* von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, falls $f(x_0) = x_0$.

1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $I = [a, b]$ ein Intervall. Ferner sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Es gelte $f(I) \subseteq I$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt.

(b) Es gelte $I \subseteq f(I)$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt.

2. Geben Sie eine bijektive stetige Funktion $f :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ an, die keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb). Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) < 1$.

2. f ist isoton in $\mathbb{R}$.

3. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) > x$.

4. f ist stetig.