Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
WS 24/25

Analysis I

Blatt 9

Abgabe: Bis Freitag, den 13.12.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 17.12.24 und 18.12.24

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^2}{1-x^2}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} \quad (n,m \in \mathbb{N}), \qquad \text{(c)} \lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2+5x}).$$

2. Bestimmen Sie die folgenden einseitigen Grenzwerte:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 2-} \frac{x^2+x+2}{2+\sqrt{2-x}}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0+} \frac{-6x^3+7x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{2x^4+4x\sqrt{x}+\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass $a \in \mathbb{R}$ genau dann ein Häufungspunkt von D ist, wenn es eine Folge (a_n) in $D \setminus \{a\}$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

2. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$ ein Häufungspunkt von $D \cap]-\infty, a[$ und $D \cap]a, \infty[$. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in a ist, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert von f an der Stelle a jeweils existiert und beide Grenzwerte mit $f(a)$ übereinstimmen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

1. Vereinfachen Sie die Terme $\ln(e^{-3}) + \ln(e^{1/2})$ und $\ln(-3^e + 3^{e+1})$ so weit wie möglich.

2. Lösen Sie die Gleichung $(2^x)^2 = 3^{(x^2)}$ nach x auf. Verwenden Sie dabei nur den natürlichen $\ln = \exp^{-1}$.

3. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^x \geq 1 + x$.

4. Zeigen Sie: Für alle $x > 0$ gilt
$$\frac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1.$$

5. Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion ln auf jedem Intervall $[a, \infty[$ mit $a > 0$ gleichmäßig stetig ist, aber auf $]0, \infty[$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x^2}{1+x} \text{ auf } D =]0, \infty[, \qquad \text{(b) } f(x) = e^{-x} \text{ auf } D =]0, \infty[.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass ein $M > 0$ existiert so, dass $|f(x)| \leq M(1 + x)$ für alle $x \in [0, \infty[$.
(*Hinweis*: Sei $x \in [0, \infty[$ und sei $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $\delta > 0$ so, dass $|f(z) - f(y)| < 1$ für alle $z, y \in [0, \infty[$ mit $|z - y| < \delta$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei dann $x_n = n\delta/2$. Zeigen Sie mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass $|f(x_n) - f(0)| < n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Folgern Sie dann, dass $|f(x) - f(0)| < 1 + n$ gilt. Benutzen Sie dabei, dass $x \in [x_n, x_{n+1}[$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.)