

Analysis I

Blatt 10

Abgabe: Bis Freitag, den 20.12.24, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 07.01.25 und 08.01.25

Aufgabe 1 (8 Punkte).

1. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = 2x \sin x + \cos x$, (b) $f(x) = \cos(\sin x)$, (c) $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$, (d) $f(x) = \exp(e^x)$.

2. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x) - x$, (b) $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{1-x}{x^2-1}$
(c) $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{(x^x)}$, (d) $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^x)^x$.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} + e^x - \sqrt{2} - e^2}{x - 2}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{1}{x}}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion f , die durch

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

definiert ist und bestimmen Sie die Ableitung f' .

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1}.$$

Bestimmen Sie das Bild $I = f(\mathbb{R}_{>0})$. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 10.13, dass $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow I$ eine Umkehrabbildung besitzt und bestimmen Sie die Funktionsvorschrift von $f^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb).

1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner seien (x_n) und (y_n) reelle Nullfolgen mit $x_n < 0 < y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(0).$$

2. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = f$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt so, dass $f(x) = ce^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. (Hinweis: Betrachten Sie $g(x) = f(x)e^{-x}$ und wenden Sie dann Korollar 12.14 an)