Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
WS 24/25

Analysis I

Blatt 11

Abgabe: Bis Freitag, den 10.01.25, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 14.01.25 und 15.01.25

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos(x)-\cos(2x)}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{1-\exp(x^2)}$ (c) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(d) $\lim_{x\to \pi} (\pi - x)\tan\dfrac{x}{2}$ (e) $\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$ (f) $\lim_{x\to 0-} x\ln(1-e^x)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

1. Es seien $D\subseteq\mathbb{R}$, $f: D\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $a\in\mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $D\cap]-\infty,a[$ und $D\cap]a,\infty[$. Ferner sei $b\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to a} f(x)=b$ genau dann gilt, wenn $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b$. (*Hinweis*: Schauen Sie sich den Beweis von Aufgabe 2.2 von Blatt 9 an.)

2. Die Funktion $f:]-\infty,2[\to\mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < x \le 0, \\ x^2 & \text{für } 0 < x \le 1, \\ \sqrt{1-(x-1)^2} & \text{für } 1 < x < 2. \end{cases}$$
Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x_0\in]-\infty,2[$ die Funktion f differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
Bestimmen Sie die Mengen, auf denen f konvex bzw. konkav ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

1. Zeigen Sie, dass $f'(x_0)=0$ genau dann gilt, wenn $x_0 = e$.

2. Zeigen Sie, dass f streng isoton auf $]0,e]$ und streng antiton auf $[e,\infty)$ ist.

3. Benutzen Sie 2. um zu beweisen, dass $\pi^e < e^\pi$ ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb). Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist.
2. Folgern Sie, dass f in 0 wächst.
3. Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass f in $\mathcal{U}_0^\varepsilon =]-\varepsilon, \varepsilon[$ weder isoton noch antiton ist.

Weihnachtsrätsel (0 Punkte). In einer Straße stehen fünf Häuser nebeneinander. In jedem Haus lebt eine Person. Alle kommen aus jeweils unterschiedlichen Ländern, trinken unterschiedliche Getränke, essen unterschiedliche Speisen und besitzen jeweils ein anderes Haustier. Das ist über die Bewohner*innen bekannt:

1. Die Person aus England lebt im roten Haus.
2. Die Person, die aus Schweden kommt, hält sich einen Hund.
3. Die Person aus Dänemark trinkt gern Tee.
4. Das grüne Haus steht direkt links neben dem weißen Haus. (vom Betrachter aus gesehen, der vor den Häusern steht)
5. Die Person, die im grünen Haus lebt, trinkt Kaffee.
6. Die Person, die eine Banane isst, hat einen Vogel.
7. Die Person, die im mittleren Haus lebt, trinkt Milch.
8. Die Person, die im gelben Haus lebt, isst Schokolade.
9. Die Person aus Norwegen lebt im ersten Haus (vom Betrachter aus gesehen ganz links).
10. Die Person, die gerne Brot isst, wohnt neben der Person mit der Katze.
11. Die Person, die ein Pferd besitzt, lebt neben der Person, die Schokolade isst.
12. Die Person, die gerne Äpfel isst, trinkt gern Bier.
13. Die Person aus Norwegen wohnt neben dem blauen Haus.
14. Die Person aus Deutschland isst gerne Kartoffeln.
15. Die Person, die gerne Brot isst, wohnt neben der Person, die Wasser trinkt.

Nun die Frage: Wem gehört der Fisch?[1]

Schöne Feiertage und kommen Sie gut ins neue Jahr!

[1] Das Rätsel soll angeblich der deutsche Physiker Albert Einstein erfunden haben, verbunden mit dem Hinweis, dass es nur zwei Prozent der Bevölkerung lösen können.