Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
WS 24/25

Analysis I

Blatt 12

Abgabe: Bis Freitag, den 17.01.25, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 21.01.25 und 22.01.25

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a, b[$. Seien $x_1, \dots, x_n \in \,]a, b[$ genau die Punkte, an denen die erste Ableitung von f verschwindet. Zeigen Sie, dass

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

   Bemerkung: Analog folgt, dass $\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$.

2. Es seien $I = [-4, 0]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$.

   (a) Bestimmen Sie möglichst große Intervalle, auf denen f isoton bzw. antiton ist.

   (b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f. Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein lokales Minimum oder Maximum handelt.

   (c) Bestimmen Sie, ob die Werte $\max\limits_{x\in I} f(x)$ und $\min\limits_{x\in I} f(x)$ existieren und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Zeigen Sie mit Hilfe von 12.13, dass $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ für alle $x \geq 0$ gilt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

1. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe, stetige und streng isotone Funktion. Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung f^{-1} konkav ist.

2. Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ konvex mit $f(0) = 0$. Dann ist die Funktion $x \mapsto f(x)/x$ auf $]0, a]$ isoton.

3. Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ konvex und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass f antiton ist.

4. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie mit Hilfe von 13.9, dass

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

   (*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ konkav ist)

Aufgabe 4 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Aus Definition 15.9 folgt, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Treppenfunktionen $u_n, v_n \in \mathcal{E}$ mit $0 \leq u_n \leq f \leq v_n$ existieren so, dass

$$\int_a^b (v_n(x) - u_n(x))\, \mathrm{d}x < \frac{1}{n}.$$

Wir definieren nun die Treppenfunktionen $p_n, q_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$p_n(x) = \sqrt{u_n(x) + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad q_n(x) = \sqrt{v_n(x) + \frac{1}{n}}.$$

Zeigen Sie:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_n \leq \sqrt{f} \leq q_n$. (*Hinweis*: Für alle $c, d \geq 0$ ist $\sqrt{c + d} \leq \sqrt{c} + \sqrt{d}$.)
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\int_a^b (q_n(x) - p_n(x))\, \mathrm{d}x < \frac{b - a + 1}{\sqrt{n}}.$$
3. $\sqrt{f}$ ist Riemann-integrierbar.