Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
WS 24/25

Analysis I

Blatt 13

Abgabe: Bis Freitag, den 24.01.25, 10.00 Uhr im ILIAS

Besprechung: In den Übungen am 28.01.25 und 29.01.25

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$. Zeigen Sie:

1. Die Funktion $h : [c, d] \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$, ist Riemann-integrierbar.
2. Ist $f : [a, b] \to [c, d]$ Riemann-integrierbar, so ist $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.
3. Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist $\min\{f, g\}$ Riemann-integrierbar.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

1. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels partieller Integration:
$$\text{(a)} \int^x \ln^2(t)\, \mathrm{d}t, \quad \text{(b)} \int^x \sin(t)\cos(2t)\, \mathrm{d}t \quad \text{(c)} \int^x \arctan(t)\, \mathrm{d}t.$$
2. Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Substitution:
$$\text{(a)} \int^x te^{-t^2}\, \mathrm{d}t, \quad \text{(b)} \int^x \frac{3t}{9+4t^2}\, \mathrm{d}t \quad \text{(c)} \int^x \frac{\ln t}{t}\, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die folgenden Integrale:
$$\text{(a)} \int_3^4 \frac{1}{(2x-5)^2}\, \mathrm{d}x, \quad \text{(b)} \int_2^3 \frac{1}{x^2+x-2}\, \mathrm{d}x, \quad \text{(c)} \int_3^5 \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie für $a = 0$, $a = 1$ bzw. $a = 2$ das unbestimmte Integral
$$\int^x \frac{1}{t^2+2t+a}\, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte, zum präzisen Aufschrieb)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Treppenfunktion $\varphi_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x < 1 - \frac{1}{n}, \\ n, & \text{falls } 1 - \frac{1}{n} \le x < 1, \\ 0, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Integral
$$\int_0^1 \varphi_n(x)\, \mathrm{d}x.$$
2. Bestimmen Sie für jedes $x \in [0, 1]$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.
3. Welche Aussage widerlegen die ersten beiden Teilaufgaben?