Heinrich Heine Universität Düsseldorf
PD Dr. Karin Halupczok
WS 24/25

Analysis I

Blatt 14

Abgabe: Keine Abgabe

Besprechung: Im Tutuorium am 31.01.25

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} e^n x^n, \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}}(x+7)^n, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n.$$

Aufgabe 2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} e^n (x+1)^n, \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x+2)^n, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\text{(a)} \int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^3}\, \mathrm{d}x, \quad \text{(b)} \int_2^{11} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\, \mathrm{d}x, \quad \text{(c)} \int_0^{\infty} x e^{-x^2}\, \mathrm{d}x, \quad \text{(d)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4.

1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf dem angegebenen Definitionsbereich:

$$\text{(a)}\ f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2x^2}, \quad \text{(b)}\ f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}.$$

2. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = \frac{1}{x^2+j^2}$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(\sum_{j=1}^n f_j)$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 5. Sei $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(\cos x)$. Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom $P_2(x)$ im Entwicklungspunkt $a = 0$ und zeigen Sie, dass für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ gilt

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{2x^3}{3}.$$