

Übungen zu Analysis II

41. (10 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Systeme von Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y_1' &= -5y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= -15y_1 + 7y_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad y_1' &= 4y_1 + y_2 - 36x \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 - 2e^x. \end{aligned}$$

42. (12 Punkte) Bestimmen Sie den Lösungsraum der folgenden Differenzialgleichungen:

$$\text{(a)} \quad y''' - y' = 0.$$

$$\text{(b)} \quad y''' - y'' - y' + y = 0.$$

$$\text{(c)} \quad y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

43. (8 Punkte) Wir betrachten die Differenzialgleichung

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2}{1-x^2} y = 0 \quad (*)$$

auf dem Intervall $-1 < x < 1$. Offensichtlich erhält man durch $\varphi(x) = x$ eine Lösung φ von (*).

- (a) Wenden Sie das Verfahren von Aufgabe 39 an, um eine weitere, von φ unabhängige Lösung zunächst auf dem Intervall $]0, 1[$ zu finden.
- (b) Geben Sie eine Basis des Lösungsraums von (*) an.
44. (10 Punkte) Sei X eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n und sei $f : X \rightarrow X$ eine Abbildung, für die gilt: Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so ist

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Zeigen Sie: Es gibt ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = x_0$.

Abgabe: Freitag, den 21. Juni 2013, 10:20 Uhr