Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2013
28. Juni 2013
Blatt 12

Übungen zu Analysis II

49. (8 Punkte) Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^3$. Finden Sie eine Zahl $a > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

    (i) Für $|x| \leq a$ ist $|f(x)| \leq a$.

    (ii) Die Funktion f ist auf dem Intervall $]-a, a[$ nicht kontrahierend.

    (iii) Für jede Zahl b mit $0 < b < a$ ist f auf $[-b, b]$ kontrahierend.

50. (8 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1, sei x_0 ein Fixpunkt von f und sei
$$||\, Df(x_0)|| < 1.$$
(Dabei gehen wir von einer der Normen $||\,.||_\infty, ||\,.||_1$ oder $||\,.||_2$ auf $\mathbb{R}^n$ aus und definieren die Norm $||\,.||$ auf $M_n(\mathbb{R})$ wie in § 9.) Zeigen Sie:
Es gibt eine Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}^n$ mit $f(U) \subseteq U$, so dass f auf U kontrahierend ist.

51. (8 Punkte) Finden Sie eine reelle 2×2-Matrix A, so dass die Abbildung $x \mapsto Ax$ von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ kontrahierend bezüglich der Norm $||\,.||_\infty$, aber nicht kontrahierend bezüglich der Norm $||\,.||_1$ ist.

52. (9 Punkte) Für $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir $f_\alpha, g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$f_\alpha(x) := \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x), \quad g_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1+x^2}\,.$$
Welche der folgenden Mengen sind gleichgradig stetig?

    (a) $\{f_\alpha |\, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

    (b) $\{g_\alpha |\, \alpha \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

    (c) $\{g_\alpha |\, 0 < \alpha \leq 1\}$.

53. (7 Punkte) Wir definieren Funktionen $g, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := x^2$, $f_n(x) := x + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie: Die Funktionenfolge $(g \circ f_n)$ konvergiert nicht gleichmäßig, obwohl die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert.

Abgabe: Freitag, den 5. Juli 2013, 10:20 Uhr