Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2013
24. Mai 2013
Blatt 7

Übungen zu Analysis II

28. (8 Punkte) Finden Sie alle Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen:
    (a) $y' = y + 1$.
    (b) $y' = y + x$.

29. (8 Punkte) Ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $\varphi' = \varphi + p$, so gibt es ein Polynom q vom Grad n und eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit
$$\varphi(x) = ce^x + q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

30. (8 Punkte) Vor 40 Jahre gingen Studien davon aus, dass die Bevölkerungszahl $P(t)$ zur Zeit t in einem Entwicklungsland der Differenzialgleichung
$$(*) \quad \frac{dP}{dt} = \alpha P^\beta$$
mit festen Zahlen $\alpha > 0, \beta > 1$ genügt. Zeigen Sie: Zur Anfangsbedingung $P(0) = P_0 > 0$ gibt es ein $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine Lösung $P :]-\infty, T[\to \mathbb{R}$ von $(*)$ mit
$$\lim_{t \nearrow T} P(t) = \infty;$$
drücken Sie T explizit durch α, β, P_0 aus.

31. (8 Punkte)
    (a) Sei (x, y) ein Punkt auf dem Kreis
    $$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\right\}$$
    mit $y \neq 0$.
    Zeigen Sie: Die Tangente an K im Punkt (x, y) hat die Steigung $-\frac{x}{y}$.
    (b) Finden Sie zwei Lösungen der Differenzialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$, die den Anfangsbedingungen $y(1) = 1$ bzw. $y(-1) = -2$ genügen.

32. (8 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung $y' = e^y \sin x$ und skizzieren Sie ihren Verlauf.

Abgabe: Freitag, den 31. Mai 2013, 10:20 Uhr
Besprechung: 5. / 13. Juni 2013