Übungen zu Analysis II

33. (12 Punkte) Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, lokal Lipschitz-stetig, stetig, differenzierbar bzw. von der Klasse C^1 sind.

    (a) $f(x) = |\, x \,|$.
    (b) $f(x) = x^5$.
    (c) $f(x) = \sqrt[5]{x}$.
    (d) $f(x) :\, = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

34. (7 Punkte) Führen Sie den Beweis von Bemerkung 2 in §8 im Detail aus, d. h. zeigen Sie: Sei X offen in $\mathbb{R}^n$ und $f : X \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1. Dann ist f lokal Lipschitz-stetig.

35. (9 Punkte) Finden Sie alle Lösungen der folgenden Differenzialgleichungen:

    (a) $y' = -y \cos x$.
    (b) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.
    (c) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$.

36. (12 Punkte) Ist $\| \,.\, \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $A = (a_{jk})$ eine relle $n \times n$-Matrix, so definieren wir wie in §9:

$$\|A\| :\, = \max\{\|Ax\| \;\mid x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\| = 1\}.$$

    (a) Geht man von der Norm $\| \,.\, \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ aus, so ist

$$\|A\| = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|.$$

    (*Zeilensummennorm*)

    (b) Geht man von der Norm $\| \,.\, \|_1$ auf $\mathbb{R}^n$ aus, so ist

$$\|A\| = \max_{k=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|.$$

    (*Spaltensummennorm*)

    (c) Warum gibt es für $n > 1$ keine Norm auf $\mathbb{R}^n$, so dass $\|A\| = \left(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2 \right)^{1/2}$ für alle $n \times n$-Matrizen A gilt?

Abgabe: Freitag, den 31. Mai 2013, 10:20 Uhr