Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2013
7. Juni 2013
Blatt 9

# Übungen zu Analysis II

37. (10 Punkte) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und seien $n, m \in \mathbb{N}$. Wir wählen Normen auf $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$, die wir beide mit $||.||$ bezeichnen. Für $A \in M(m, n; \mathbb{K})$ sei

$$||A|| := \max\{||Ax|| \,|\, x \in \mathbb{K}^n \text{ und } ||x|| = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass man dadurch eine Norm auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $M(m, n; \mathbb{K})$ erhält.

38. (10 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Systeme von Differenzialgleichungen:

(a)
$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + e^x \\ y_2' &= y_1. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \cos x \\ y_2' &= y_1 e^{-\sin x}. \end{aligned}$$

39. (10 Punkte) Sei $I$ ein offenes Intervall und seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten die Differenzialgleichung

$$(*) \qquad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$ und sei $J$ ein offenes Teilintervall von $I$ mit $\varphi(x) \neq 0 \,\forall\, x \in J$.

Ferner sei $x_0 \in I$ und $u : J \to \mathbb{R}$ sei eine diffenzierbare Funktion mit

$$u'(x) = \frac{1}{\varphi(x)^2} \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right).$$

Zeigen Sie, dass man durch $\psi(x) := \varphi(x)u(x)$ eine weitere Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}$ von $(*)$ erhält.

40. (10 Punkte) Berechnen Sie $e^A$ für die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Abgabe:** Freitag, den 14. Juni 2013, 10:20 Uhr