Übungsblatt 2

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 17.04.2018, Abgabe: Di., 24.04.2018

B **Aufgabe 1:** (Uneigentliche Integrale, $3+3$ Punkte)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha < 1$ (ii) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konvergiert $\Leftrightarrow \alpha > 1$

B **Aufgabe 2:** (Uneigentliche Integrale, $4+4$ Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ (ii) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$ mit $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$

B **Aufgabe 3:** (Grenzwerte und Integrale, 4 Punkte)
Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x x\exp(t^2 - x^2)\,\mathrm{d}t$$

existiert und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

Aufgabe 4: (Majoranten-/Minorantenkriterium)
Beweisen Sie folgende Teile des Satzes über uneigentliche Integrale:
Seien $f,\,g : [a,\,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass $f,\,g \in R([a,\,b])$ für alle $b \in (a,\,\beta)$.

(iv) **Majorantenkriterium:** Ist $|f| \le g$ und $\int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent, dann konvergiert $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ absolut.

(v) **Minorantekriterium:** Ist $f \ge g \ge 0$ und $\int_a^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$ divergent, dann divergiert auch $\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.