Übungsblatt 3

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 24.04.2018, Abgabe: Mi., 02.05.2018

B **Aufgabe 1:** (Konvergenz in $\mathbb{R}^n$, 2 Punkte)
Zeigen Sie: Für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Konvergenz äquivalent zu komponentenweiser Konvergenz, d. h.

$$a_k \to a \text{ für } k \to \infty \text{ in } \mathbb{R}^n \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall j = 1, \ldots, n : a_k^{(j)} \to a^{(j)} \text{ für } k \to \infty \text{ in } \mathbb{R}$$

B **Aufgabe 2:** (Stetigkeit, $3+3+3$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit, Abgeschlossenheit, Beschränktheit und Kompaktheit:

(i) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y < 1 + \sqrt{|x|} \, \}$

(ii) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, -1 \leq x \leq 1, \; y = x^2 + 1 \, \}$

(iii) $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x > y > z > 0 \, \}$

B **Aufgabe 3:** (Stetigkeit, $3+3$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

(i) $$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(ii) $$g(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Aufgabe 4: (Kriterien für Stetigkeit)
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist stetig;

(ii) für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(U) \subseteq D$ offen in D;

(iii) für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(A) \subseteq D$ abgeschlossen in D.

Präsenzaufgaben zu Blatt 3

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 25./26.04.2018

Aufgabe 1: (Matrizen und lineare Algebra)

a) Berechnen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

alle Matrixprodukte aus zwei Faktoren, die definiert sind.

b) Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist.

c) Zeigen Sie, dass für eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichung $|Dx| \le |D|\,|x|$ gilt.

Aufgabe 2: (Folgen in $\mathbb{R}^n$)
Durch $a_n := (1 + \frac{1}{n},\ 2^{-n},\ \log(\frac{n^2}{1+n^2}))$ für $n \in \mathbb{N}$ wird eine Folge in $\mathbb{R}^3$ definiert. Zeigen Sie direkt mit Hilfe des ϵ-Kriteriums, dass diese Folge gegen $a := (1,\,0,\,0) \in \mathbb{R}^3$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > n_\epsilon$.

Aufgabe 3: (Topologie im $\mathbb{R}^n$)
Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit, Abgeschlossenheit, Beschränktheit und Kompaktheit:

(i) $\{\,(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > 0\,\}$

(ii) $\{\,(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^7 - 3 > 8\,\}$

(iii) $\{\,(x,\,\sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\,\} \cup \{\,(0,\,0)\,\}$

(iv) $\{\,(x,\,\sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\,\} \cup (\{\,0\,\} \times [-1,\,1])$