Übungsblatt 5

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 08.05.2018, Abgabe: Di., 15.05.2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

B **Aufgabe 1:** (Partielle Differenzierbarkeit, 3 Punkte)
Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,\, y) := y\sqrt{2x^2 + y^2}, \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,$$

partiell differenzierbar ist und berechnen Sie ggf. die partiellen Ableitungen.

B **Aufgabe 2:** (Differenzierbarkeit und Jacobi-Matrix, $4+4+4$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen jeweils auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ggf. die Jacobi-Matrix; bestimmen Sie in Teil c) außerdem $\det J_h$:

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, gegeben als

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3) := (x_1(e^{x_2} + e^{-x_3}),\; x_1(e^{x_2} - e^{x_3})), \qquad x = (x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $g(x) = |x|$ für $x \in \mathbb{R}^2$.

c) $h : (0,\, \infty) \times (0,\, 2\pi) \times (0,\, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben als

$$h(r,\, \phi,\, \psi) := (r\cos(\phi)\sin(\psi),\; r\sin(\phi)\sin(\psi),\; r\cos(\psi)), \qquad r > 0,\; 0 < \phi < 2\pi,\; 0 < \psi < \pi.$$

B **Aufgabe 3:** (Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit, 3 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist als

$$f(x,\, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,\, y) \neq (0,\, 0), \\ 0, & (x,\, y) = (0,\, 0), \end{cases} \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,$$

und zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar aber nicht differenzierbar in $(0,\, 0)$ ist.

Aufgabe 4: (Mittelwertsatz)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die gegeben ist als $f(t) := (\cos(t),\, \sin(t))$ für $t \in \mathbb{R}$, und zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist auf $\mathbb{R}$, und, dass es kein $t_0 := 0$ und $h := 2\pi$ kein $\tau \in (t_0,\, t_0 + h)$ gibt mit $f(t_0 + h) - f(t_0) = f'(\tau)h$.

Präsenzaufgaben zu Blatt 5

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi., 09.05.2018

Aufgabe 1: (Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^n$)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf (partielle) Differenzierbarkeit:

(i) $$f(x, y) := \begin{cases} x^3 y \sin(y/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(ii) $$g(x, y) := \begin{cases} x^2 y^2 \log(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie ggf. die partiellen Ableitungen und die Jacobi-Matrix.

Aufgabe 2: (Differenzierbarkeit und lineare Approximation)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die gegeben ist als

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 + x + 2y + xy \\ 1 + 3x - y + 7x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

und bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(0, 0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Vergleichen Sie die Funktion f mit der Linearisierung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + J_f(0, 0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$