Übungsblatt 6

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 15.05.2018, Abgabe: Di., 22.05.2018

B **Aufgabe 1:** (Kettenregel, 3 + 3 Punkte)
Berechnen Sie jeweils $f'(x, y)$, $g'(u)$ bzw. $g'(u, v)$ und $(g \circ f)'(x, y)$ für alle $u, v, x, y \in \mathbb{R}$, wobei

a) $f(x, y) = e^{xy}\cos(y)$ und $g(u) = (u + 1,\ \sin(u))$ für $u, x, y \in \mathbb{R}$;

b) $f(x, y) = (x^2 - y^2,\ 2xy)$ und $g(u, v) = (u^3 - 3uv^2,\ 3u^2v - v^3)$ für $u, v, x, y \in \mathbb{R}$.

B **Aufgabe 2:** (Differenzierbarkeit, 4 + 4 Punkte)
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seien gegeben als $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ und

$$f(x, y) = \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 + y^2}, \qquad g(x, y) = \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Sind f bzw. g differenzierbar in $(0, 0)$? Für welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ existieren die Richtungsableitungen $\partial_v f(0, 0)$ bzw. $\partial_v g(0, 0)$?

B **Aufgabe 3:** (Homogene Funktionen, 4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: f ist genau dann positiv homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d. h.

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

wenn die Euler'sche Homogenitätsrelation $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erfüllt ist.

Hinweis: Differenzieren Sie die erste Relation nach t.

Aufgabe 4: (Stetigkeit und Partielle Differenzierbarkeit)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen $\partial_x f,\ \partial_y f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f stetig in Ω ist.

Hinweis: Denken Sie an den Mittelwertsatz.

Präsenzaufgaben zu Blatt 6

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 16./17.05.2018

Aufgabe 1: (Kettenregel)
Berechnen Sie $f'(x,\, y)$, $g'(u,\, v)$ und $(g \circ f)'(x,\, y)$ für alle $u,\, v,\, x,\, y \in \mathbb{R}$, wobei

$$f(x,\, y) = (1 + 3x,\ 2 + x + 2y), \qquad g(u,\, v) = (u + v,\ 1 - v), \qquad u,\, v,\, x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2: (Richtungsableitungen)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben als $f(0,\, 0) = 0$ und

$$f(x,\, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, (0,\, 0)\,\}.$$

Berechnen Sie für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ die Richtungsableitung $\partial_v f(0,\, 0)$. Ist f differenzierbar in $(0,\, 0)$?

Aufgabe 3: (Höhere partielle Ableitungen)
Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,\, y,\, z) = x^2 \sin(y) - z$ sämtliche partielle Ableitungen $\partial^\alpha f(x,\, y,\, z)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ mit $|\alpha| \leq 3$.