Übungsblatt 7

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 22.05.2018, Abgabe: Di., 29.05.2018

B **Aufgabe 1:** (Lokale Extrema, $4+4$ Punkte)
Untersuchen Sie die Funktionen $f,\, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf lokale Extrema, wobei

$$f(x,\, y) = x^4 - 2x^2 + 2x^2y^2 - y^2, \qquad g(x,\, y) = (x+y^2)\exp(-(x^2+y^2)), \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

B **Aufgabe 2:** (Lokale Extrema, $3+3$ Punkte)
Sei $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $h(x,\, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$ für $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass h auf jeder Geraden durch $(0,\, 0)$ ein lokales Minimum in $(0,\, 0)$ hat, und dass h *kein* lokales Minimum in $(0,\, 0)$ hat.

B **Aufgabe 3:** (Taylorpolynome, $3+3$ Punkte)
Berechnen Sie jeweils das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(h,\, p) = \sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(p) h^\alpha$ am Punkt p für

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,\, y,\, z) = x^2y^3z^4$ für $x,\, y,\, z \in \mathbb{R}$ und $p = (1,\, 1,\, 1) \in \mathbb{R}^3$;

b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(u,\, v) = (u^v,\, \sin(u+v))$ für $u,\, v \in \mathbb{R}$ mit $u > 0$ und $p = (1,\, 1) \in (0,\, \infty) \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: (Notwendige Bedingungen für lokale Extrema)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(\Omega)$. Weiter habe f ein lokales Minimum in $x_0 \in \Omega$. Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ von f in x_0 positiv semi-definit ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorentwicklung von f um x_0.

Präsenzaufgaben zu Blatt 7

Analysis II, SoSe 2018

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Bearbeitung: Mi./Do., 23./24.05.2018

Aufgabe 1: (Multiple Choice)
Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Eine symmetrische Matrix ist entweder positiv definit oder negativ definit oder indefinit.

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Ist $\nabla f(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ negativ definit, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.

c) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und gilt $\det A < 0$, so ist A indefinit.

Aufgabe 2: (Lokale Extrema)
Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf lokale Extrema, wobei

$$f(x,\, y) = (x + y)\log(1 + x^2 + y^2), \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 3: (Taylorpolynome)
Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(h,\, p) = \sum_{|\alpha|\le 2} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(p)h^\alpha$ am Punkt p für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,\, y,\, z) = 1 + x + 2y - 4z, \qquad (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$$

und $p = (0,\, 0,\, 0)$ sowie $p = (1,\, 1,\, 1)$.