Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung Analysis II

SoSe '25 hhu
K. Halupczok

Literatur:

- Hier und im gesamten Skript steht [Hoff] für das Buch
  Dieter Hoffmann: Analysis für Wirtschaftswissenschaftler und Ingenieure,
  s. auch die Literaturangaben auf der Webseite der Vorlesung zur Analysis I.
  In diesem Buch finden Sie bestimmte Skriptteile ausführlicher aufgeschrieben.
- Manche Inhalte finden Sie ausführlich im Buch: O. Forster, Analysis 2
- Ausführlicheres zu eher speziellen Themen steht in: K. Königsberger, Analysis 1,
  manches auch in: H. Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2
- Viel mehr zu "Differentialgleichungen" steht in:
  H. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen

Kapitel: Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

Teil 1: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

an1: Der $\mathbb{R}^n$ als normierter Vektorraum

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.1

Stichworte: $\mathbb{R}^n$ mit Normen $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$, (Folgen)Konvergenz, GWSätze, Projektionen

Beschreibung: Wir stellen einige Arbeitsdefinitionen (insbesondere Normen) in diesem Kapitel bereit, die als Grundlage für Funktionen, die von mehr als nur einer Variablen abhängen, dienen. Für Grenzwerte müssen wir "Abstände" zwischen Argumenten und Funktionswerten messen können, wofür Normen eingeführt werden. Viele Überlegungen der eindimensionalen Analysis können so fast wörtlich auf die mehrdimensionale Situation übertragen werden.

an2: Geometrie von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m=1$ oder $n=1$

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.2

Stichworte: affine Räume, Parameter- und Normalendarstellung, Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, Komponentenfunktionen

Beschreibung: Nach kurzer Überlegung zur Darstellung affin-linearer Objekte im $\mathbb{R}^n$, also Geraden, Ebenen, Hyperebenen, ... arbeiten wir an der geometrischen Anschauung von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die affin linear oder nicht affin linear sind. Wir betrachten insbesondere $\mathbb{R}$-wertiger (auch: reellwertiger) Funktionen, d.h. solche Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $m=1$, sowie auch "kurvenartige" Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit $n=1$.

an3: Konvergenz/Grenzwerte/Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.3

Stichworte: Funktionsgrenzwerte, Stetigkeit (komponentenweise und partiell)

Beschreibung: Wir definieren Funktionsgrenzwerte bei Funktionen f von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

---

an4: Mehrdimensionales Ableiten

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.4

Stichworte: Richtungsableitung, partielle Ableitung, totale Ableitung, Klein-o

Beschreibung: Wir führen den Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ein: Über Richtungsableitungen entlang der Koordinatenachsen gelangen wir zu partiellen Ableitungen. Wir definieren die totale Ableitung und sehen, wie diese mit den partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen berechnet werden kann. Die „Linearisierung" von f ergibt also die Matrix $Df(a) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so, dass $f(x) \approx f(a) + Df(a)\cdot(x-a)$ in guter Näherung ist.

---

an5: Partielle und totale Ableitungen

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.4

Stichworte: Funktionalmatrix, Gradient, Kettenregel, Richtungsableitungen

Beschreibung: Die totale Ableitung liefert einen einfachen Weg, Richtungsableitungen zu berechnen. Wir definieren für $m=1$ den Gradienten und beweisen die allgemeine Kettenregel.

---

an6: Mittelwertsatz und der Satz von Schwarz

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.5

Stichworte: MWS, stetig diff'bar, mehrfache partielle Ableitung, Satz von Schwarz

Beschreibung: Der MWS wird für Skalarfelder verallgemeinert.

---

an7: Satz von Taylor, Lokale Extrema

Literatur: [Hoff] Kapitel 9.6/7, [Forster] Kapitel 7

Stichworte: Satz von Taylor, Extrema, kritische Stellen, Kriterien, Hessematrix

Beschreibung: Der Satz von Taylor in der mehrdimensionalen Version für Skalarfelder liefert Kriterien zur Erkennung von Extrema anhand Gradienten und Hessematrix.

an8: Lokale Umkehrbarkeit

Literatur: [Forster, Ende von Kap. 8]

Stichworte: Kontraktion, Banachscher Fixpunktsatz, Lokale Umkehrbarkeit

Beschreibung: Mit dem Banachschen Fixpunktsatz zeigen wir den Satz über die lokale Umkehrbarkeit als Verallgemeinerung des Satzes von der Ableitung von Umkehrfktn.

---

an9: Extrema mit Nebenbedingungen, implizite Funktionen

Literatur: [Hoff], Kapitel 9.8, [Forster], Kapitel 8, 9

Stichworte: Extrema mit NBen, Lagrange-Multiplikatoren, impliziter Funktionensatz, UMF

Beschreibung: Als Anwendung des Satzes von der lokalen Umkehrbarkeit zeigen wir den impliziten Funktionensatz und untersuchen Extrema mit Nebenbedingungen.

Teil 2: Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

an10: Konvergenz in metrischen Räumen

Literatur: [Forster], Kapitel 1, 2

Stichworte: Normierter $\mathbb{R}$-VR, B-W, Äquivalenz aller Normen im $\mathbb{R}^n$, metrischer Raum, Kgz. darin

Beschreibung: Wir haben den $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen und damit die Grenzwerttheorie des $\mathbb{R}^n$ aufgebaut. Die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ ist dazu äquivalent. Wir beschreiben noch andere Normen, zeigen den mehrdimensionalen Satz von Bolzano-Weierstraß und damit, dass alle Normen in $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

---

an11: Topologische Grundbegriffe

Literatur: [Forster], Kapitel 2

Stichworte: Umgebungsbasis, hausdorffsch, offen/abgeschlossen, Topologie

Beschreibung:
Die bekannten Konzepte von "Kugel" und "Umgebungen" können im metrischen Raum definiert und studiert werden. Die mehrdimensionale Analysis hat es oftmals erfordert, dass um einen Punkt $a \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ immernoch eine komplette Umgebung von a in D enthalten ist. Wir verallgemeinern dies für metrische Räume und kommen so zum Konzept offener und abgeschlossener Mengen, das zentral für die Topologie (als Teilgebiet der Mathematik) ist.

---

an12: Konvergenz und Kompaktheit

Literatur: [Forster], Kapitel 3

Stichworte: Vollständigkeit, allg. Banach-Fixpunktsatz, Kompaktheit, Heine-Borel

Beschreibung: $\mathbb{R}^n$ ist als metrischer Raum vollständig. Wir zeigen, dass abgeschlossene Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums wieder vollständig sind, was einen neuen Blick auf den Banachschen Fixpunktsatz wirft.
Weiter werden wir zum Kompaktheitsbegriff geführt, und wir zeigen den Satz von Heine-Borel, welcher besagt, dass die (überdeckungs-)kompakten Teilmengen im metrischen Raum $\mathbb{R}^n$ genau die sind, die beschränkt und abgeschlossen sind.

---

an13: Stetigkeit, Kompaktheit

Literatur: [Forster], Kapitel 3

Stichworte: Stetigkeit, Bilder kompakter Mengen sind kompakt, gleichmäßig stetig

Beschreibung: Wir verallgemeinern den Stetigkeitsbegriff auf metrische Räume. Die grundlegenden Eigenschaften stetiger Abbildungen werden gezeigt. Die Bedeutung des Kompaktheitsbegriffs wird deutlich, u.a. in dem Satz, dass Bilder kompakter Mengen wieder kompakt sind, als Verallg. des Satzes vom Min./Max.

---

an 14: Weierstraßscher Approximationssatz (WAS)

Literatur: [Königsberger, Analysis 1], Kapitel 15/16.

Stichworte: Supremumsnorm auf Kompakter Menge, WAS mit Polynomen

Beschreibung: Die Bedeutung der Kompaktheit als topologische Eigenschaft ist für die Mathematik nicht zu unterschätzen. In diesem Kapitel zeigen wir als Anwendung davon den Weierstraßschen Approximationssatz (für Polynome und trigonometrische Polynome), und insb., dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

---

an 15: Zusammenhang in metrischen Räumen

Literatur: [Königsberger], Kapitel 1.5

Stichworte: zusammenhängend (zush.) $\Leftrightarrow$ wegzush. $\Leftrightarrow$ polygonal zush.

Beschreibung: Der Begriff "zusammenhängend" wird für metrische Räume definiert und mit "wegzusammenhängend" und "polygonal zusammenhängend" identifiziert, was über "Verbindungen" zwischen zwei Punkten erklärt wird.

Teil 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen

an 16: Differentialgleichungen und Richtungsfelder

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.1

Stichworte: DGL, gewöhnliche DGL, Lösungsfunktion, Fragestellungen, Richtungsfelder

Beschreibung: Wir geben die Definition einer Differentialgleichung als Funktionalglg. zwischen gesuchter Fkt. $y = y(x)$, der Variablen x und Ableitungen von y.

---

an 17: DGLn mit „getrennten Variablen"

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.2

Stichworte: DGL mit getrennten Variablen, AWA, Beispiele

Beschreibung: Wir untersuchen DGLn mit „getrennten Variablen" x und y.

---

an18 : Lineare DGL 1. Ordnung

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.3

Stichworte: Variation der Konstanten, zugeh. homogene DGL, partikuläre Lsg.

Beschreibung: Bereits die einfache DGL $y' = \alpha y$ beschreibt exponentielles Verhalten (Wachstum für $\alpha > 0$, Zerfall für $\alpha < 0$), in vielen Anwendungen ein Standardkonzept. Wir behandeln die DGL $y' = f(x)y + g(x)$ als Verallgemeinerung dieser Form.

---

an19 : Bernoullische und Euler-homogene DGL

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.4/5

Stichworte: Bernoullische DGL, (Euler-)homogene DGL

Beschreibung: Die Bernoullische DGL ist eine spezielle Version der Linearen DGL 1. Ordnung und wird darauf zurückgeführt.
Die Euler-homogene DGL ist eine DGL 1. Ordnung mit einem Term abhängig von $\frac{y}{x}$ auf der rechten Seite und kann auf eine DGL mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

---

an20: Spezielle explizite DGLn 2. Ordnung

Literatur: [Hoffmann], Kapitel 7.6/7

Stichworte: explizite DGL 2. Ordnung ohne y und ohne x

Beschreibung: Wir behandeln zwei spezielle Beispiele für DGLn 2. Ordnung, die sich durch geeignete Substitution in eine DGL 1. Ordnung überführen lässt.

---

an21 : Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Literatur: [Hoffmann]: Kapitel 7.8, [Heuser]: Kapitel 16

Stichworte: Linearität der Lösungsmenge, charakteristisches Polynom, Operatormethode

Beschreibung: Behandeln mit der Operatormethode Lineare DGLn n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, homogen und inhomogen. Speziell den Fall $n=2$.

---

an22: Der Satz von Picard-Lindelöf

Literatur: [Heuser], §12

Stichworte: Fixpunktsatz von Weissinger, Satz von Picard-Lindelöf

Beschreibung: Mit dem Fixpunktsatz von Weissinger zeigen wir den Satz von Picard-Lindelöf.

---

an23: Differentialgleichungssysteme

[Literatur: frühere Vorlesung in Lineare Algebra II, Kapitel e14.]

Stichworte: DGLsysteme (linear 1. Ordnung, Konstante Koeff.), Jordan-Normalform

Beschreibung: Wir lösen DGLsysteme 1. Ordnung (linear mit Konstanten Koeffizienten) durch Anwenden des Satzes von der Jordan-Normalform aus der Linearen Algebra II.

Ende der Vorlesung "Analysis II"