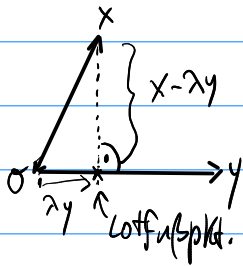


Tutorium zur Analysis II, 11.4.2025

- ① Projektionsabb. / Lote
- ② Hyperebene
- ③ Bew.: Hyperebene sind affine Räume
- ④ Sätze vom Rechteck / Rhombus / Pythagoras
- ⑤ Skalarfeld / Niveaulinien
- ⑥ Geometrievorstellung

① an 1: $pr_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m x_j e_j + \dots + \sum_{j=m+1}^n x_j e_j \xrightarrow{pr_j} x_j$
 $j \in \{1, \dots, n\}$

an 2: $pr(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y \in \mathbb{R}y$



$y \perp x - \lambda y$, d.h.

$$0 = \langle y, x - \lambda y \rangle = \langle y, x \rangle - \langle y, \lambda y \rangle = \langle y, x \rangle - \lambda \langle y, y \rangle$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \quad y \neq 0$$

Bsp.: $\mathbb{R}^3, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: $p(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y = \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

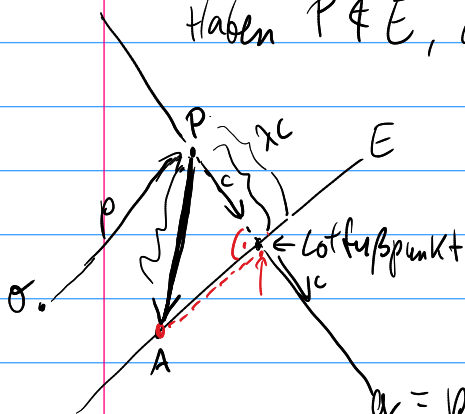
$$= \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{4^2 + 5^2 + 6^2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \dots$$

② Bsp.: Lot/Proj. von Punkt P auf Ebene E:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \underbrace{2x - 3y + 5z = 4} \right\}$$

$$\text{z.B. ist } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A$$

Haben $P \notin E$, da $2 \cdot 1 - 3 \cdot 7 + 5 \cdot 6 \neq 4$.



Normalenvektor:

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \perp E$$

$g = p + \mathbb{R}c$ Gerade

$$g = \{ p + \lambda c; \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Projiziere $a-p$ in Richtung c , gibt Lotfußpunkt:

$$\text{Dann: } p + \underbrace{\frac{\langle a-p, c \rangle}{\langle c, c \rangle}}_{\lambda} \cdot c = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

wobei

$$a-p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Bem.:

$$P = \underline{\underline{(1, 7, 6)}} \in \mathbb{R}^3, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Ortsvektor

zum Punkt P

- 3 -

Hyperebene: $a + U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $(n-1)$ -dimensionaler UVR,
 $a \in \mathbb{R}^n$

Normalenlsg.:

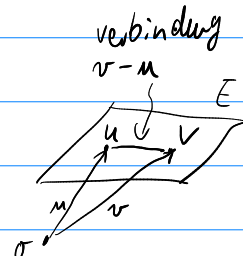
$$E = \{x \in \mathbb{R}^n; \underbrace{\langle x, c \rangle}_{\text{G./g.}} = \alpha\}, \quad c \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$$

Beh.: $c \in \mathbb{R}^n$ ist senkrecht auf $E = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, c \rangle = \alpha\}$,

denn: Ist $u \in E$, d.h. $\langle u, c \rangle = \alpha$,
und ist $v \in E$ ebenso. $\langle v, c \rangle = \alpha$,

$$\begin{aligned} \text{dann ist } \langle \underbrace{u-v}_{\substack{\text{ein bel.} \\ \text{Richtungsvektor} \\ \text{von } E}}, c \rangle &= \langle u, c \rangle - \langle v, c \rangle \\ &= \alpha - \alpha = 0. \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $u, v \in E$



□

③ $\{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, c \rangle = \alpha\} = H_{c, \alpha}, \quad c \neq 0$

Beh.: $H_{c, \alpha} = p + U$, $\dim U = n-1$, $p \in H_{c, \alpha}$.

Bew.: Betr.: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, c \rangle = f(x)$ linear ✓

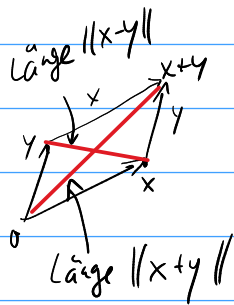
Haben: $U = \ker f$, ist UVR von $\mathbb{R}^n$

Klar: $\dim U = \dim \ker f \stackrel{\text{Rangsatz}}{=} n - \underbrace{\dim \text{im } f}_{=1} = n-1$ ✓

Weiter: $H_{c, \alpha} \stackrel{!}{=} p + U$, denn:

$$\begin{aligned} \underline{x \in H_{c, \alpha}} &\Leftrightarrow \langle x, c \rangle = \alpha \stackrel{|\cdot \langle p, c \rangle}{\Leftrightarrow} \langle x-p, c \rangle = \alpha - \underbrace{\langle p, c \rangle}_{= \alpha} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\langle x-p, c \rangle}_{= f(x-p)} = 0, \text{ d.h. } x-p \in \ker f = U \\ &\Leftrightarrow x = p + u, \quad u \in U \end{aligned}$$

④ : Satz vom Rechteck: Parallelogramm ist Rechteck
 $(\Rightarrow)$ Diagonalen gleich lang



Bew.:

$$\begin{aligned} ||x-y||^2 &= ||x+y||^2 \Leftrightarrow \langle x-y, x-y \rangle = \langle x+y, x+y \rangle \\ (\Rightarrow) \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ (\Rightarrow) -2\langle x, y \rangle &= 2\langle x, y \rangle \Leftrightarrow 4\langle x, y \rangle = 0 \\ (\Rightarrow) \langle x, y \rangle &= 0 \Leftrightarrow x \perp y \Leftrightarrow \text{Rechteck} \checkmark \quad \square \end{aligned}$$

Satz vom Rhombus:
 Parallelogramm mit
 gleichlangen Seiten

Rhombus $(\Rightarrow)$ Diagonalen senkrecht
 $\Gamma ||x||^2 = ||y||^2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \langle x-y, x+y \rangle = 0$

Satz von Pythagoras: Dreieck rechth. $\Leftrightarrow ||x||^2 + ||y||^2 = ||x-y||^2$
 Γ klar mit $||x-y||^2 = ||x||^2 - 2\langle x, y \rangle + ||y||^2$

⑤ Skalarfeld: $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$

z.B.: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \sin(x) + yz^2 - 1 \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, c \rangle \in \mathbb{R}$

$\left\{ \begin{aligned} f(u+v) &= f(u) + f(v) \\ f(\lambda u) &= \lambda f(u) \end{aligned} \right. \quad \uparrow \text{ist linear!}$

Graph: $G(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, c \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

Niveaumenge: $\{x \in D; f(x) = w\}, w \in \mathbb{R}$

Hier: $G(f) \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; u = w \right\}$

(6) Längenberechnung: im $\mathbb{R}^2$: $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

im $\mathbb{R}^3$: $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

im $\mathbb{R}^n$: $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

• Kugeln im $\mathbb{R}^2$ vom Radius r : $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2 + y^2} \leq r \}$

im $\mathbb{R}^3$ vom " :
(Mittelpunkt o) $\{ x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_2 \leq r \}$

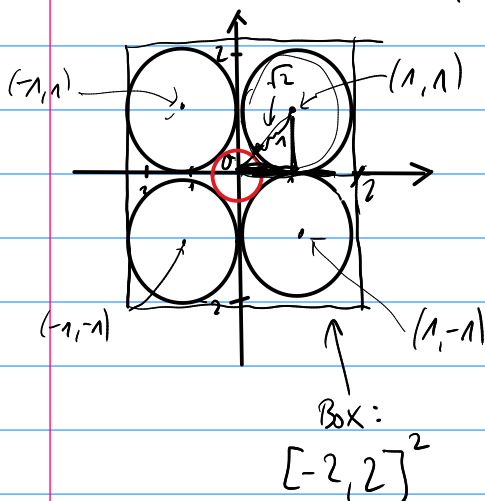
• Kugeln im $\mathbb{R}^2$ um die 4 " 2^2 Mittelpunkte $\pm e_1 \pm e_2$ vom Radius 1:

$K_1 = \{ (x, y); \left\| (x, y) - (e_1 + e_2) \right\| \leq 1 \}$

$K_2 = \{ (x, y); \left\| (x, y) - (e_1 - e_2) \right\| \leq 1 \}$

$K_3 = \{ (x, y); \left\| (x, y) - (-e_1 + e_2) \right\| \leq 1 \}$

$K_4 = \{ (x, y); \left\| (x, y) - (-e_1 - e_2) \right\| \leq 1 \}$



• im $\mathbb{R}^3$: 2^3 8 Kugeln vom Radius 1
mit Mittelpunkte $\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3$

können eingeschriebene Kugel betr.

um o als Mittelpunkt, die alle K_i nur berührt
 $= \{ (x, y); x, y \in [-2, 2] \}$

i.a.: in Box $[-2, 2]^n = [-2, 2] \times [-2, 2] \times \dots \times [-2, 2]$ (12)

schwarze Kugeln: $2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$

Beh.: Ab Dim. $n \geq 10$ ist rote Kugel nicht in $[-2, 2]^n$ enthalten!

Bew.: Der Radius der roten Kugel

• ist $\sqrt{2} - 1$ in $\mathbb{R}^2$ ($\sqrt{2} - 1 = \sqrt{1^2 + 1^2} - 1$)

• in $\mathbb{R}^3$ ist der Radius $= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} - 1 = \sqrt{3} - 1$

• $\vdots$

• in $\mathbb{R}^n$ ist Radius $= \sqrt{n} - 1$.

Die innere Kugel ragt aus $[-2, 2]^n$ heraus,

sobald $\boxed{\sqrt{n} - 1 > 2} \leftarrow$

$(\Rightarrow \sqrt{n} > 3$

$(\Rightarrow \underline{n > 9})$

□

$n = 2$:

$\sqrt{2} - 1 < 2$,
d.h.,

rote Kugel
ist eingeschrieben