

Tutorium zur Analysis II, Nr. 10

Themen:

- ✓ (1) Bew. aufgabe für zush. Menge
- ✓ (2) top. Begriffe ordnen, Beispiele $\leadsto$ Tabelle! $\leadsto$
- mündl.: (3) Wdh.: für Differentialgl.: Integraltheorie aus Ana 1
- ✓ (4) WAS: einfache Anw. bsp. 2
- ✓ (5) Satz von Min./Max.: $\left\{ \begin{array}{l} f: R \rightarrow S \text{ stetig, } R, S \text{ metr. Räume} \\ R \text{ kp.} \Rightarrow f(R) \text{ kp.} \end{array} \right\}$

det / Bsp. $\uparrow$ hatten dies schon
weg- / polygon.
abg. / offen / zush. /
kp. / konvex / sternförmig /
disjunkt

Für Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ formuliert:

$$\left\{ \begin{array}{l} f: R \rightarrow S \text{ stetig, } R \subseteq \mathbb{R}^n, S \subseteq \mathbb{R}^m \\ R \text{ kp.} \Rightarrow f(R) \text{ kp.} \end{array} \right.$$

Dies mit $m=1$: $f(R) \subseteq \mathbb{R} \text{ kp.}$

d.h. $f(R)$ ist besch. & abg. $\leadsto$ ex. min./Max.!
 $\leadsto \exists r_1, r_2 \in R: f(r_1) = \min f(R)$
 $f(r_2) = \max f(R)$

Zu (1): Aufgabe für zush. von Mengen:

1. Bsp.: Beh.: Ein bel. Weg in $\mathbb{R}^n$ (als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$) ist zush.

Bew.: hatten: Satz 15.5: $R \xrightarrow{f} S$ stetig, R zush. $\Rightarrow f(R)$ zush. $\quad \square$

Wissen: $[0,1]$ zush., Weg: $f: [0,1] \rightarrow S$ stetig
 $\stackrel{\text{(s.u.)}}{=} \mathbb{R} \quad \text{Satz 3-} \quad \Rightarrow \quad \{f(t); t \in [0,1]\} \text{ zush.}$
15.5. $\square$

-2-

Frage: Vor.: $f: R \rightarrow S$, R, S metr. Räume.

Beh.: f stetig $(\Leftrightarrow)$ jede zush. Menge wird unter f auf zush. Menge abgebildet
" $\Rightarrow$ " ist Satz 15.5.

② $\left\{ \begin{array}{l} \text{Gilt: "} \Leftarrow \text{" : (?),} \\ \text{d.h. } f \text{ unstetig} \Rightarrow \exists \text{ zush. Menge } Z: f(Z) \text{ nicht zush.,} \\ \text{d.h. } f(Z) = O_1 \cup O_2 \text{ für } O_1, O_2 \subseteq S, O_1 \neq \emptyset \neq O_2 \end{array} \right. \text{ (?)}$

(z.z.: f stetig, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: f(B_a^\delta) \subseteq B_{f(a)}^\varepsilon$)

Vermute: Nein, Beh.: $\exists f: R \rightarrow S$, mit: jede zush. Teilmenge von R wird auf zush. Teilmenge von S abgebildet,
und f unstetig.

Beispiel wird noch gesucht!

-3-

2.Bsp.: Beh.: $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist zush.

Def.: M nicht zush.

$$\Leftrightarrow \exists O_1, O_2 \subseteq M: M = O_1 \cup O_2 \wedge O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

Versuche

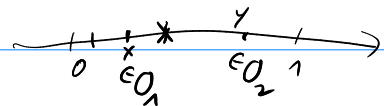
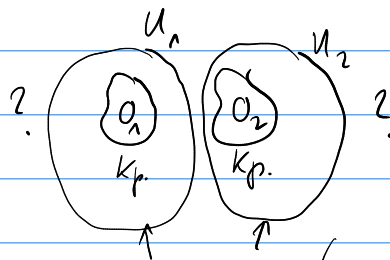
Bew.: Ann. $[0,1]$ nicht zush.

$$\text{dann } \exists O_1, O_2 \subseteq [0,1]: [0,1] = O_1 \dot{\cup} O_2.$$

~~ist offene Üb., da $[0,1]$ kp.~~

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{offen} & \text{offen} \\ \text{abg.} & \text{abg.} \end{matrix}$
 $\rightarrow O_1 \text{ kp.}, O_2 \text{ kp.}$

[Heine-Borel]



$$x \in \partial O_1 \subseteq O_1, \text{ da } O_1 \text{ abg.}$$

$$[0,1] = O_1 \dot{\cup} O_2$$

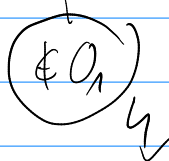
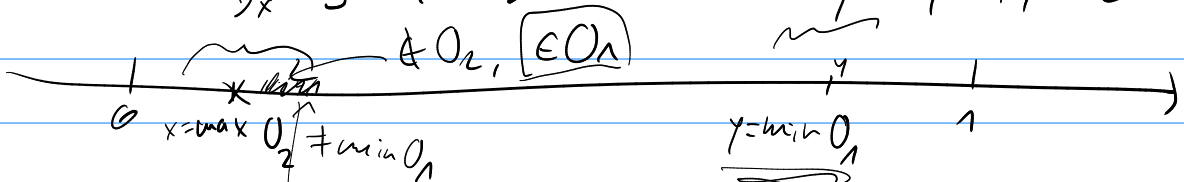
$$\Rightarrow O_1 = \overset{\circ}{O}_2 = [0,1] \setminus O_2 \text{ abg.,}$$

$$\text{ebenso } O_2 = \overset{\circ}{O}_1 = [0,1] \setminus O_1 \text{ offen abg.}$$

Idee:

$$B_x^\varepsilon =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$$

$$B_y^\varepsilon =]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$$



$$B_x^\varepsilon \cap B_y^\varepsilon = \emptyset \text{ wegen Trennungsaxiom}$$

... $\hookrightarrow \square$

Jetzt Beweisidee zu nachvollziehbarem Beweis aufschreiben:

Beh.: $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist zush.

Bew.: Ann. $[0,1]$ nicht zush.,

dann $\exists O_1, O_2 \subseteq [0,1] : [0,1] = O_1 \cup O_2, O_1 \neq \emptyset \neq O_2,$
und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Da O_1 offen, ist $O_2 = G(O_1) = [0,1] \setminus O_1$ abg.,

analog ist auch O_1 abg. Nun sind $O_1, O_2 \subseteq [0,1]$ beschränkt.

Somit ex. jeweils $\max O_1 \in O_1, \max O_2 \in O_2$.

Sei $x = \max O_1 \in O_1, y = \max O_2 \in O_2$.

Da O_1 offen, ex. $\varepsilon > 0 : B_x^\varepsilon =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap [0,1] \subseteq O_1$.

1. Fall: $x \neq 1$. Dann sei ε so klein, dass $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq [0,1]$,
d.h. $B_x^\varepsilon =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

Aber dann ist $x + \frac{\varepsilon}{2} \in B_x^\varepsilon \subseteq O_1$ und $x + \frac{\varepsilon}{2} > x = \max O_1$ ↓

2. Fall: $x = 1$. Dann ist $y = \max O_2 \neq 1$, dafür greift 1. Fall → ↓.

□

Zu (2): Tabelle für top. Begriffe: $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$

(Def.: M, N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$.)

zush. $\Leftarrow$ konvex
 $\Leftarrow$ sternförmig

	in $\mathbb{R}$	in $\mathbb{R}^2$
Bsp. für konvexes M :	$M =]-\infty, 3]$ (also zush.) "hier gilt zush. $\Rightarrow$ konvex" $\Downarrow$ IV"	$M = [-1,1]^2 \setminus \{(x,y); x^2+y^2 < 1\}$ zush., nicht konvex! "zush. $\nRightarrow$ konvex" nicht sternförmig! "zush. $\nRightarrow$ sternf."
Bsp. für nicht zush. M :	$M = \mathbb{Q}$, zush. Komponenten: $\{x\}, x \in \mathbb{Q}$	$M = [-1,1]^2 \setminus \{(x,y); x^2+y^2 \leq 1\}$, zush. komp.: 4 Stück, nämlich $M_1 = \{(x,y) \in [0,1]^2; x^2+y^2 > 1\}$ $M_2 = \{(x,y) \in [0,1] \times [-1,0]; \dots$ usw.
Bsp. für sternförmig, nicht konvex: "sternförmig $\nRightarrow$ konvex"	— "hier gilt sternf. $\Rightarrow$ konvex" $\Downarrow$ IV"	$M = \overline{(0), (1)} \cup \overline{(0), (1)} \cup \overline{(0), (-1)}$, nicht konvex, zush. da sternförmig

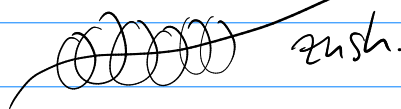
Hatten

Satz: zush. $(\Leftrightarrow)$ wegzush. $(\Rightarrow)$ polygonzush. (in $\mathbb{R}^n$)

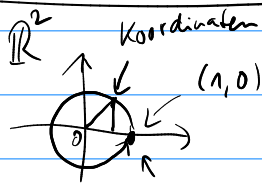
Bsp.: Intervalle sind wegzusammenhängend,

da z.B. $I = [a, b] = \{ a + t(b-a); t \in [0, 1] \}$

Also: wg. Satz ist I auch zush. $= f([0, 1])$ für $f(t) = a + t(b-a)$, f ist stetig ✓



Bsp. für Wege:



Kreis:
um 0,
Radius 1

$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ stetig

↗
Anfangspunkt
= Endpunkt

bzw.:

$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$

Bildpunkte: $g([0, 1]) = f([0, 2\pi])$

f, g sind Parametrisierungen des Kreises

Haben: $g(t) = f(2\pi t) = f \circ \varphi(t)$,
wo $\varphi: t \mapsto 2\pi t$ stetig,
streng mon., bijektiv

Zu(4): WAS für stetige Fktn.:

Für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Kp. gilt: $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$
 $\Rightarrow \exists$ Polynom $P \in \mathbb{C}[x] : \|P - f\|_K < \varepsilon$

Bsp.: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in]-1, 1[\subseteq \mathbb{R}$

geom. Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$

WAS: Sei $K \subseteq]-1, 1[$ Kp., z.B. $K = [0, \frac{1}{2}] \subseteq]-1, 1[$
 dort ist die Kgl. der Potenzreihe glm. Taut WAS!

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall N \geq n_0 : \forall x \in K \left| \sum_{n=0}^N x^n - f(x) \right| < \varepsilon$

$\uparrow$
 $n_0 = n_0(\varepsilon, K)$ $\underbrace{\quad}_{P(x)}$

$\Rightarrow \|P - f\|_K < \varepsilon$

hier: $\forall x \in K: \left| \sum_{n=0}^N x^n - \frac{1}{1-x} \right| < \varepsilon$

Bem.: Man kann $n_0(\varepsilon, K)$ für konkrete $\varepsilon > 0$, $K \subseteq]-1, 1[$, etwa $K = [0, \frac{1}{2}]$,
 ausrechnen / angeben: $\varepsilon = 1/100$.

$$\left| \sum_{n=0}^N x^n - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \right| = \left| x^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right| = \left| x^{N+1} \cdot \frac{1}{1-x} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x^{N+1} < (1-x)\varepsilon \Leftrightarrow x^{N+1} < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \Leftrightarrow (N+1) \ln(x) < \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Leftrightarrow (N+1) \cdot (-\ln 2) < \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$x \in K = [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow 1-x \geq \frac{1}{2}$

d.h. wenn $N > \frac{\ln(200)}{\ln(2)} - 1$ gewählt wird,
unabh. von x!

(Abh. ist N nur von ε und den Grenzen von K, d.h. von K)

- 7 -

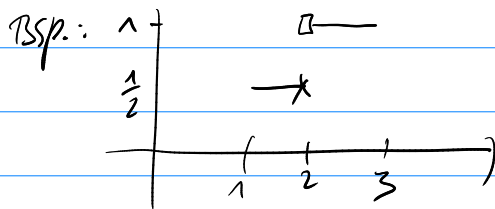
Frage: Was ist genau "Unstetigkeit"?

Haben: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}$

Def: f in $a \in \mathbb{R}$ stetig: $(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(B_a^\delta) \subseteq B_{f(a)}^\varepsilon$
 $\forall x \mid \delta(x-a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Das (logische) Gegenteil lautet:

$\neg$ ("") $(\Leftrightarrow) \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x: \delta(x-a) < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$
 $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
weit: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$



$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [1, 2], \\ 1, & x \in]2, 3], \end{cases}$ und $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$.

Beh.: f ist in $a=2$ unstetig, da:

$\exists \varepsilon > 0$, nämlich $\varepsilon = \frac{1}{10}$,
dann sei $\delta > 0$ bel.

Dann: $\exists x$ mit $\delta(x-2) < \delta \wedge |f(x) - f(2)| \geq \frac{1}{10}$,
ja etwa $x = 2 + \frac{\delta}{25}$ mit $\delta < 5$: ✓

$$\delta(x-2) = \frac{\delta}{25} < \delta \quad \checkmark$$

$$\text{und } |f(x) - f(2)| = \underbrace{1}_{=1} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{=1/2} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{10} \quad \checkmark$$

□