Tutorium zur Analysis II, Nr. 10

Themen:

✓ (1) Bew.aufgabe für zush. Menge

✓ (2) top. Begriffe ordnen, Beispiele ⇝ Tabelle! ⇝ { abg. / offen / zush. / Kp. / konvex / sternförmig / disjunkt — Def / Bsp. — weg- / polygonz. — hatten dies schon

mündl.: (3) Wdh.: für Differentialglg.: Integraltheorie aus Ana 1

✓ (4) WAS: einfache Anw. bsp. 2

✓ (5) Satz von Min./Max.: $\left\{ \begin{array}{l} f: R \to S \text{ stetig}, \quad R, S \text{ metr. Räume} \\ R \text{ kp.} \Rightarrow f(R) \text{ kp.} \end{array} \right\}$ ✓

Für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ formuliert:

$$\left\{ \begin{array}{l} f: R \to S \text{ stetig}, \quad R \subseteq \mathbb{R}^n,\ S \subseteq \mathbb{R}^m \\ R \text{ kp.} \Rightarrow f(R) \text{ kp.} \end{array} \right.$$

Dies mit $m = 1$: $f(R) \subseteq \mathbb{R}^1$ Kp.,

d.h. $f(R)$ ist beschr. & abg. ↳ ex. min./Max.!

$\leadsto \exists\, r_1, r_2 \in R: \ f(r_1) = \min f(R)$
$f(r_2) = \max f(R)$

Zu (1): Aufgabe für Zush. von Mengen:

1. Bsp.: Beh.: Ein bel. Weg in $\mathbb{R}^n$ (als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$) ist zush.

Bew.: hatten: Satz 15.5: $R \xrightarrow{f} S$ stetig, R zush. $\Rightarrow f(R)$ zush. ✗

Wissen: $\underbrace{[0,1]}_{=R}$ zush. (s.u.) Seite -3-, Weg: $f: [0,1] \to S$ stetig

$\overset{15.5.}{\Rightarrow} \{f(t);\ t \in [0,1]\}$ zush.

□

Frage: Vor.: $f: R \to S$, R, S metr. Räume.

Beh.: f stetig $\iff$ jede zush. Menge wird unter f auf zush. Menge abgebildet

„$\Rightarrow$" ✓ ist Satz 15.5.

2 Gilt: „$\Leftarrow$": 2,

d.h. f unstetig $\Rightarrow \exists$ zush. Menge Z: $f(Z)$ nicht zush.,

d.h. $f(Z) = O_1 \dot\cup O_2$ für $O_1, O_2 \subset S$, $O_1 \neq \emptyset \neq O_2$ 2

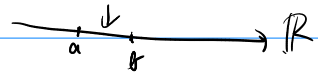
(z.z.: f stetig, d.h. $\forall a$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$: $f(B_a^\delta) \subseteq B_{f(a)}^\varepsilon$)

Vermute: Nein, Beh.: $\exists f: R \to S$, mit: Jede zush. Teilmenge von R wird auf zush. Teilmenge von S abgebildet, und f unstetig.

Beispiel wird noch gesucht!

1. Bsp.: $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

- unstetig, da $f(\frac{1}{n}) = 0 \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 1 = f(0)$ ✓
- jede zush. Teilmenge von $\mathbb{Q}$ wird auf eine zush. Teilm. von $\mathbb{R}$ abgeb., denn diese sind genau die $\{c\}$, mit $c \in \mathbb{Q}$, diese werden auf zush. Teilm. von $\mathbb{R}$ abg.



$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, x \in\,]a,b[\setminus \mathbb{Q}$

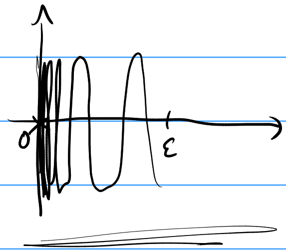
$$\Rightarrow \underset{\text{nicht zush.}}{[a,b] \cap \mathbb{Q}} = \underbrace{(\underset{\subseteq \mathbb{R}}{[a,x[} \cap \mathbb{Q})}_{O_1} \dot\cup \underbrace{(\underset{\subseteq \mathbb{R}}{]x,b]} \cap \mathbb{Q})}_{O_2}, \quad O_1 \neq \emptyset \neq O_2,$$

O_1, O_2 offen in $[a,b] \cap \mathbb{Q}$

Für jedes $c \in \mathbb{Q}$ ex. Zush.Komp., die c enthält, nämlich $\{c\}$.

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \quad (\text{stetig auf } \mathbb{R}_{>0}) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



- f bildet zush. ein IV $[0,\varepsilon]$ ab auf $[-1,1]$ (zush.) ✓
- f ist unstetig, da $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$
$= 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 = f(0)$

Beh.: $A := \{(0,0)\} \cup \overbrace{\{(x, \sin(\tfrac{1}{x}));\ 0 < x < 1\}}^{A^*} \subseteq \mathbb{R}^2$
ist zusammenhängend in $\mathbb{R}^2$,
aber nicht wegzusammenhängend (ist nicht offen)!
↑ denn A hat keine innere Punkte!

[$\rightsquigarrow$ $f: [0,1) \to \mathbb{R}$ st.
$f([0,1))$ zush., da $[0,1)$ zush. ✓]

Bew.: • A ist zush., denn
haben $A^* := \{(x, \sin(\tfrac{1}{x}));\ 0 < x < 1\} \subseteq A$,
und A^* ist als stetiges Bild von $]0,1]$ zush.
Wegen $\underset{\text{zush.}}{A^*} \subseteq A \subseteq \underset{\text{zush.}}{\overline{A^*}} \Rightarrow A$ zush. ✓

• A ist nicht wegzush., [A^* wegzush.]
denn $(0,0)$ und $(\frac{1}{\pi}, 0)$ lassen nicht in A durch eine Kurve verbinden.
Wäre sonst φ derart, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2): [0,1] \to A$ st. mit $\varphi(0) = (0,0)$, $\varphi(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$.
Sei $t_0 := \sup\{0 \leq t < 1,\ \varphi(t) = (0,0)\}$. Dann $t_0 < 1$, $\varphi(t_0) = (0,0)$.
Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}$, $0 < \delta < 1 - t_0$ bel. Für $t \in]t_0, t_0+\delta[$ ist $\varphi_1(t) > 0$.
Das φ_1-Bild von $[t_0, t_0+\delta[$ ist ein IV $[0,\beta]$, $\beta > 0$. Es gibt ein
$t_a = [t_0, t_0+\delta]$ mit $\varphi_1(t_a) = \frac{2}{(4a+1)\pi}$, also $\varphi_2(t_a) = 1$.
Haben $\|\varphi(t_0) - \varphi(t_a)\| \geq |\underbrace{\varphi_2(t_0)}_{=0} - \underbrace{\varphi_2(t_a)}_{=1}| = 1 > \varepsilon$, ↯ zur Stetigkeit von φ. □

z.Bsp.: Beh.: $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ ist zush.

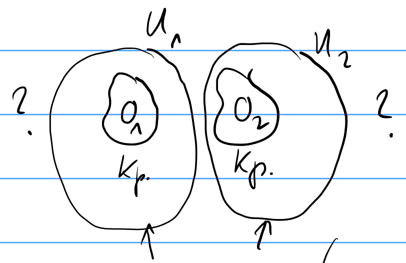
Def.: M nicht zush.
$\Longleftrightarrow \exists\, O_1, O_2 \not\subset M: \quad M = O_1 \cup O_2 \;\wedge\; O_1 \cap O_2 = \emptyset$
$O_1 \neq \emptyset \neq O_2$

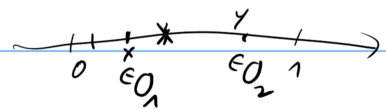
Versuche

Bew.: Ann. $[0,1)$ nicht zush.,
dann $\exists\, O_1, O_2 \subseteq [0,1]: \; [0,1] = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{offen}\\ \text{abg.}}}{O_1} \,\dot\cup\, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{offen}\\ \text{ab.}}}{O_2}$.

~~ist offene Üb., da $[0,1)$ Kp.~~

$\rightsquigarrow O_1$ Kp., O_2 Kp.
[Heine-Borel]





$x \in \partial O_1 \subseteq O_1$, da O_1 abg.

$[0,1] = O_1 \,\dot\cup\, O_2$
$\Rightarrow O_1 = \complement O_2 = [0,1] \setminus O_2$ abg.,
ebenso $O_2 = \complement O_1 = [0,1] \setminus \underset{\text{offen}}{O_1}$ offen abg.

Idee:

$B_x^\varepsilon = \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ $\qquad$ $B_y^\varepsilon = \,]y-\varepsilon, y+\varepsilon[$

$\notin O_2$, $\boxed{\in O_1}$

$x = \max O_2 \neq \min O_1$ $\qquad$ $y = \min O_1$

$\notin O_1$ ↯

$B_x^\varepsilon \cap B_y^\varepsilon = \emptyset$ wegen Trennungsaxiom

... ↯ □

Jetzt Beweisidee zu nachvollziehbarem Beweis aufschreiben:

Beh.: $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist zush. $\overset{f([0,1])}{\underset{\text{zush}}{\Rightarrow}}$ $[c,d]$ zush. $\qquad f(0)=c,\ f(1)=d$

wo $f(x) = \underbrace{(d-c)x+c}_{\text{linear} \to \text{stetig}}$

Bew.: • Ann. $[0,1]$ nicht zush.,
dann $\exists\, O_1, O_2 \subseteq [0,1]$: $[0,1] = O_1 \cup O_2$, $O_1 \neq \emptyset \neq O_2$,
und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

• Da O_1 offen, ist $O_2 = \complement O_1 = [0,1] \setminus O_1$ abg.,
analog ist auch O_1 abg. Nun sind $O_1, O_2 \subseteq [0,1]$ beschränkt.
Somit ex. jeweils $\max O_1 \in O_1$, $\max O_2 \in O_2$.

→ Sei $x = \max O_1 \in O_1$, $y = \max O_2 \in O_2$.

→ Da O_1 offen, ex. $\varepsilon > 0$: $B_x^\varepsilon = \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \cap [0,1] \subseteq O_1$.

1. Fall: $x \neq 1$. Dann sei ε so klein, dass $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\, \subseteq [0,1]$,
d.h. $B_x^\varepsilon = \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

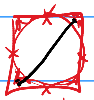
Aber dann ist $x + \frac{\varepsilon}{2} \in B_x^\varepsilon \subseteq O_1$ und $x + \frac{\varepsilon}{2} > x = \max O_1$, ↯.

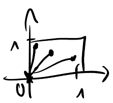
→ 2. Fall: $x = 1$. Dann ist $y = \max O_2 \neq 1$, dafür greift 1. Fall ⇝ ↯
(für y statt x) □

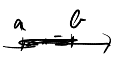
Zu (2): Tabelle für top. Begriffe: $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$
(Def.: M, N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$.)

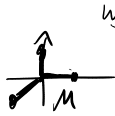
zush. ⇐ konvex ⇙ sternförmig ⇖

	in $\mathbb{R}$	in $\mathbb{R}^2$
Bsp. für konvexes M:	$M = \,]-\infty, 3]$ (also zush.) ⌜hier gilt zush. ⇒ konvex⌟ IV	$M = [-1,1]^2 \setminus \{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$ zush., nicht konvex! ⌜zush. ⇏ konvex⌟ nicht sternförmig! ⌜zush. ⇏ sternf.⌟
Bsp. für nicht zush. M:	$M = \mathbb{Q}$, zush. Komponenten: $\{x\}$, $x \in \mathbb{Q}$	$M = [-1,1]^2 \setminus \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 1\}$, zush. Komp.: 4 Stück, nämlich $M_1 = \{(x,y) \in [0,1]^2;\ x^2+y^2>1\}$, $M_2 = \{(x,y) \in [0,1] \times [-1,0];\ \ldots\}$ usw.
Bsp. für sternförmig, nicht konvex: ⌜sternförmig ⇏ konvex⌟	⌜hier gilt sternf. ⇒ konvex⌟ IV	$M = \overline{\binom{0}{0},\binom{1}{0}} \cup \overline{\binom{0}{0},\binom{0}{1}} \cup \overline{\binom{0}{0},\binom{-1}{-1}}$, nicht konvex, zush. da sternförmig


zush.
nicht konvex







sternförmig

Hatten

Satz: zush. $\Leftrightarrow$ wegzush. $\Leftrightarrow$ polygonzush. (in $\mathbb{R}^n$)

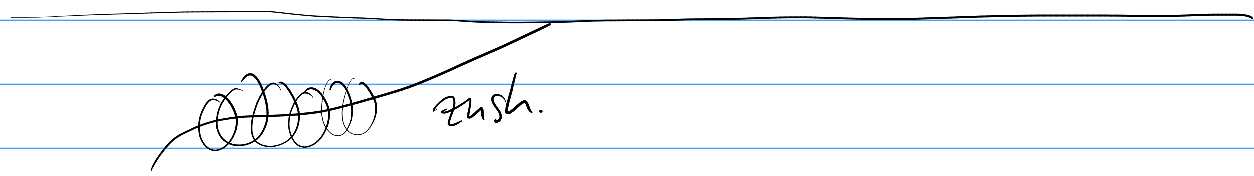
Bsp.: Intervalle sind wegzusammenhängend,

da z.B. $I = [a,b] = \{ a + t(b-a) ;\ t \in [0,1] \}$

$= f([0,1])$ für $f(t) = a + t(b-a)$,

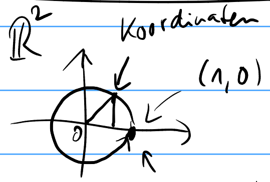
f ist stetig ✓

Also: wg. Satz ist I auch zush.



zush.

Bsp. für Wege:



Anfangspunkt = Endpunkt

Kreis: um 0, Radius 1

$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ stetig

bzw.:

$g : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ g(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$

Bildpunkte: $g([0,1]) = f([0, 2\pi])$

f, g sind Parametrisierungen des Kreises

Haben: $g(t) = f(2\pi t) = f \circ \varphi(t)$,

wo $\varphi : t \mapsto 2\pi t$ stetig, streng isoton, bijektiv

Zu (4): WAS für stetige Fktn.:

Für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Kp. gilt: $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$
$\Rightarrow \exists$ Polynom $P \in \mathbb{C}[X]: \| P - f \|_K < \varepsilon$

Bsp.: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in]-1, 1[\subseteq \mathbb{R}$

geom. Reihe: $f(x) = \frac{1}{1-x}$

WAS: Sei $K \subseteq]-1,1[$ Kp., z.B. $K = [0, \frac{1}{2}] \subseteq]-1,1[$
dort ist die Kgz. der Potenzreihe glm. laut WAS!

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall N \geq n_0 : \forall x \in K \; \underbrace{\Big| \underbrace{\sum_{n=0}^{N} x^n}_{P(x)} - f(x) \Big| < \varepsilon}$

$\boxed{n_0 = n_0(\varepsilon, K)}$

$(\Rightarrow) \; \| P - f \|_K < \varepsilon$

hier: $\forall x \in K: \left| \sum_{n=0}^{N} x^n - \frac{1}{1-x} \right| < \varepsilon$

Bem.: Man kann $n_0(\varepsilon, K)$ für konkrete $\varepsilon > 0$, $K \subseteq]-1,1[$, etwa $K = [0, \frac{1}{2}]$, $\varepsilon = 1/100$, ausrechnen / angeben:

$$\left| \sum_{n=0}^{N} x^n - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \right| = \left| x^{N+1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right| = \left| x^{N+1} \cdot \frac{1}{1-x} \right| \overset{!}{<} \varepsilon$$

$$\Leftarrow x^{N+1} \overset{!}{<} (1-x)\varepsilon \underset{\substack{x \in K = [0, \frac{1}{2}] \\ \rightsquigarrow 1-x > \frac{1}{2}}}{\Leftarrow} x^{N+1} < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \Leftarrow (N+1)\ln(x) < \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{\substack{x < \frac{1}{2} \\ \rightsquigarrow \ln(x) < -\ln(2)}}{\Leftarrow} (N+1) \cdot (-\ln 2) < \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

d.h. wenn $N > \frac{\ln(200)}{\ln(2)} - 1$ gewählt wird, unabh. von x!

(Abh. ist N nur von ε und den Iv.grenzen von K, d.h. von K)

Frage: Was ist genau "Unstetigkeit"?

Haben: $f : R \to S$

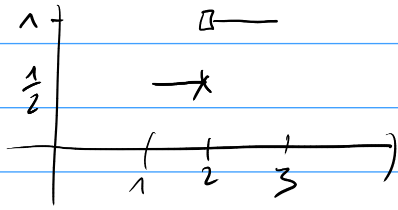
Def.: f in $a \in R$ stetig $:\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \underbrace{f(B_a^\delta) \subseteq B_{f(a)}^\varepsilon}_{\forall x : \varrho(x-a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x)-f(a)) < \varepsilon}$

Das (logische) Gegenteil lautet:

$$\neg(\text{''}) \iff \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x : \varrho(x-a) < \delta \wedge \sigma(f(x)-f(a)) \geq \varepsilon$$

weil: $\neg(A \Rightarrow B) \iff \neg(\neg A \vee B) \iff A \wedge \neg B$

Bsp.:



$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [1,2], \\ 1, & x \in]2,3], \end{cases}$$ und $f : [1,3] \to \mathbb{R}$.

Beh.: f ist in $a = 2$ unstetig, da:

$\exists \varepsilon > 0$, nämlich $\varepsilon = \frac{1}{10}$,

dazu sei $\delta > 0$ bel.

Dann: $\exists x$ mit $\varrho(x-2) < \delta \wedge \sigma(f(x)-f(2)) \geq \frac{1}{10}$, ✓

ja etwa $x = 2 + \frac{1}{25}$ tut's:

$\varrho(x-2) = \frac{1}{25} < \delta$ ✓

und $\sigma(\underbrace{f(x)}_{1} - \underbrace{f(2)}_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{10}$ ✓

□