

# Tutorium zur Analysis II, Nr. 11

Themen: 1.) Bsp. mit getr. Variablen

2) Linearer Fall an 18

$\exp(\int \dots) \leftarrow$

Zu 1.): Bsp.:  $y' = \frac{x^2}{y} \Leftrightarrow y' \cdot y = x^2$ ,

hier:  $f(x) = x^2, g(y) = y$   $y > 0$   
 $f: I_1 \rightarrow \mathbb{R}, g: I_2 \rightarrow \mathbb{R},$   
 wo  $I_1 = \mathbb{R}, I_2 = \mathbb{R}_{>0}$

AWA:

$y(a) = b,$   
 $a, b \in \mathbb{R}$

DGL:  $y' \cdot y = x^2 \Leftrightarrow y' g(y) = f(x) \Leftrightarrow \int_a^x y' g(y) dy = \int_a^x f(t) dt \Leftrightarrow \int_{y(a)=b}^{y(x)} g(s) ds = \int_a^x f(t) dt$

bilde  $F(x) = \int_a^x f(t) dt, G(y) = \int_b^y g(s) ds, \Leftrightarrow G(y(x)) = F(x)$

hier:  $F(x) = \int_a^x t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_a^x = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} a^3$   $\Leftrightarrow y(x) = G^{-1}(F(x))$

$G(y) = \int_b^y s ds = \frac{1}{2} s^2 \Big|_b^y = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} b^2$

Hier: DGL  $\Leftrightarrow G(y(x)) = F(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} b^2 = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} a^3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{3} a^3$

$\Leftrightarrow_{y>0} y = \sqrt{\frac{2}{3} x^3 + b^2 - \frac{2}{3} a^3}, \text{ sofern definiert!}$

$\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} x^3 \geq \frac{2}{3} a^3 - b^2$

$\Leftrightarrow x^3 \geq a^3 - \frac{3}{2} b^2$

$\Leftrightarrow_{x>0} x \geq \sqrt[3]{a^3 - \frac{3}{2} b^2}$

$\geq 0 \leadsto \text{benötige}$   
 $a^3 \geq \frac{3}{2} b^2 \checkmark$

$I = \left[ \sqrt[3]{a^3 - \frac{3}{2} b^2}, \infty \right)$

Lsg.:  $y(x) = \sqrt{\frac{2}{3} x^3 + b^2 - \frac{2}{3} a^3}$

Zu 2.): Beh.:  $y_0(x) := \exp\left(\int_a^x f(t) dt\right)$  ✓

ist Lsg. von  $y' = f(x) \cdot y$   $\leftarrow$  zu  $\otimes$   $y' = f(x) \cdot y + g(x)$   
gehörige homogene DGL

Bew.:

Denn  $y_0' = \left(\exp\left(\int_a^x f(t) dt\right)\right)' \underset{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{\exp\left(\int_a^x f(t) dt\right)}_{\text{äußere Abh.}} \cdot \underbrace{\left(\int_a^x f(t) dt\right)'}_{\text{innere Abh.}}$

$\underset{\substack{\text{HS} \\ \text{des D: f+1-B.}, \\ \text{Teil 2}}}{=} \exp\left(\int_a^x f(t) dt\right) \cdot \underbrace{f(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{HS Teil 1}}} = y_0(x) \cdot f(x)$  ✓ ✓ □

HS Teil 1:  $\int_a^x f(t) dt = F(t) \Big|_{t=a}^{t=x} = F(x) - F(a)$

HS Teil 2:  $\frac{d}{dx} \underbrace{\int_a^x f(t) dt}_{=:\varphi(x)} = f(x)$   
 $x$  ist die Variable

Heuristik:  $y' = f(x) \cdot y \quad (\Rightarrow) \quad \frac{y'}{y} = f(x)$

$(\Rightarrow) \quad \underbrace{\frac{1}{y} \cdot y'}_{\text{Abl. von } \ln(y)} = f(x)$

$(\Rightarrow) \quad (\ln(y))' = f(x)$

$(\Rightarrow) \quad \ln(y) = \int_a^x f(t) dt$

$\stackrel{(\Rightarrow)}{\exp(\dots)} y(x) = \exp\left(\int_a^x f(t) dt\right)$