

Tutorium zur Analysis II, Nr. 12

Themen:

- ✓ 1.) Satz 18.5 $\rightarrow$ AWA $y(a) = b$
- ✓ 2.) heute: Operatormethode
- ✓ 3.) n-ter Ordnung, Konst. Koeff.: Lsgs.-methode?
- ✓ 4.) Kettenlinie-DGL aufstellen

Zu 1.): Satz 18.5: Lin. DGL 1. Ordnung

Bem. 18.4

$$(*) \quad y' = f(x)y + g(x)$$

$$(*)_h \quad y' = f(x)y$$

Rezept: (a) homog. Lsg.:
 $a \in \mathbb{R}$

$$y_0(x) = \exp\left(\int_a^x f(t) dt\right) \quad \leftarrow \begin{matrix} \uparrow \\ \text{ej} \end{matrix} \quad \rightarrow y_0(a) = 1$$

jede hom. Lsg.: $y_{0,b}(x) = b \cdot \exp\left(\int_a^x f(t) dt\right)$
 $b \in \mathbb{R}$

$\rightarrow y_{0,b}(a) = b$
AWA gelöst
von dieser Fkt.

(b) AWA $y(a) = b$ vorgeg.,
wird gelöst von der eind. best. Fkt.

$$(*) \quad y(x) = y_0(x) \cdot \left(\int_a^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt + b \right)$$

• dies tut's:

$$\begin{aligned} \text{Denn: } y'(x) &= y_0'(x) \cdot \left(\int_a^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt + b \right) + y_0(x) \cdot \left(\frac{g(x)}{y_0(x)} \right)' \\ &= \underbrace{f(x)y_0(x)}_{=y(x)} \cdot \left(\int_a^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt + b \right) + y_0(x) \cdot \frac{g(x)}{y_0(x)} = f(x)y + g(x) \end{aligned}$$

• AWA ist erfüllt: $y(a) = \underbrace{y_0(a)}_{=1} \cdot \left(\underbrace{\int_a^a \frac{g(t)}{y_0(t)} dt}_{=0} + b \right) = b \quad \checkmark$

-2-

Bsp.: $y(0) = 5$ AWA $a = 0, b = 5$

Satz 18.5 $\leadsto$ Lsg. von $y' = f(x)y + g(x)$, AWA

$$\text{lautet } y(x) = y_0(x) \cdot \left(\int_0^x \frac{g(t)}{y_0(t)} dt + \underbrace{b}_{=5} \right) = y_0 \cdot \int \dots + \underbrace{b y_0(x)}_{\text{jede Lsg. von } y' = f(x)y}$$

wo $y_0(x) = \exp\left(\int_0^x f(t) dt\right)$ die homog. Lsg. ist (mit $y_0(0) = 1$).

noch konkreter: $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$, $y(0) = 5$ AWA

$$j :=]-\frac{1}{2}, \infty[$$

Lsg. von $y' = \ln(x+1)y + \frac{1}{x+1}$, $y(0) = 5$
ist

$$y(x) = y_0(x) \cdot \left(\int_0^x \frac{1}{(t+1)y_0(t)} dt + 5 \right), \leftarrow$$

$$\text{wo } y_0(x) = \exp\left(\int_0^x \ln(t+1) dt\right) = \exp\left(\underbrace{(x+1)\ln(x+1) - x}_{= (0+1)\ln(1) - 0}\right)$$

$$\Rightarrow y_0 = \exp\left((x+1)\ln(x+1) - x\right)$$

$$\begin{aligned} &\text{SF von } \ln(x+1) \text{ ist } (x+1)\ln(x+1) - x, \\ &\text{denn } ((x+1)\ln(x+1) - x)' \stackrel{\text{Pr. regel}}{=} 1 \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} - 1 = \ln(x+1) \end{aligned}$$

Thema 2.): Operatormethode

Operator = Abb. zw. Funktionenräumen

$$\text{z.B. Diff. op. } D = \frac{d}{dx} : \mathcal{C}^\infty(j, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(j, \mathbb{K})$$

$$m \mapsto Dm = m'$$

D linear!

$$D^2 = D \circ D, \text{ denn } D^2 m = D(Dm) = D(m') = m''$$

D^2 linear, $D^3, \dots, D^n$ alle linear,

$$D^0 = \text{id} = E : m \mapsto m$$

$$\text{d.h. } D^l\left(\sum c_i m_i\right) = \sum c_i D^l m_i$$

Krieger: auch $\sum_{\ell=0}^k c_{\ell} D^{\ell}$ ist linearer Operator,
 denn $(\sum c_{\ell} D^{\ell})u = \sum c_{\ell} D^{\ell}(u)$
 $\Rightarrow \mathcal{L}(D)u = \sum c_{\ell} u^{(\ell)}$

$\mathcal{L}(D): \mathcal{C}^{\infty}(j; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}(j; \mathbb{K})$
 $u \mapsto \mathcal{L}(D)u$ auch op., linear

Bei DGL: $\underbrace{u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u}_{\mathcal{L}(D)u} = f$

Bsp.: $\varphi(x) = x^2 - 3x + 6$, $u = e^{5x}$

$$\begin{aligned} \text{Dann: } \mathcal{L}(D)u &= (D^2 - 3D + 6)u \\ &= D^2 u - 3D u + 6u \\ &= u'' - 3u' + 6u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}(D)e^{5x} &= (e^{5x})'' - 3(e^{5x})' + 6e^{5x} \\ &= 25e^{5x} - 15e^{5x} + 6e^{5x} \\ &= (25 - 15 + 6)e^{5x} = 16e^{5x} \\ &= \varphi(5)e^{5x} \end{aligned}$$

insb. $\mathcal{L}(D)e^{\alpha x} = \varphi(\alpha)e^{\alpha x}$, gl. Beh. 21.13. ✓

Zu 3.): Lsg. von $u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f$

Bsp.: $n=2 \leadsto u'' + a u' + b u = f$

homogene Gg.: $u'' + a u' + b u = 0$ (*)

Ansatz: $u(x) = e^{\lambda x}$, $e^{i\lambda x}$, wo $\lambda \in \mathbb{R}$
 $[u(x) = a \sin(x+t) + c \leadsto (\sin(x) \cos(x) \leadsto n=2, \text{ unter Umständen})]$

Ansatz in DGL (*) einsetzen:

$$\sim (e^{\lambda x})'' + a(e^{\lambda x})' + b e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{\neq 0} e^{\lambda x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

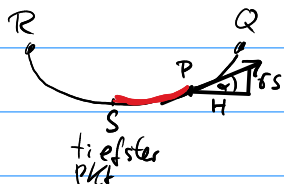
3 Mögl.: $\left. \begin{array}{l} 1. \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \in \mathbb{R} \\ 2. " \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ 3. " = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{einfache} \\ \text{Nst.} \\ \text{doppelt Nst.} \end{array}$

$\sim e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ sind hom. Lsgn., alle " : $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$\rightarrow$ Komplexe Lsgn. werden in reelle Bestandteile getrennt, s. Vorl. 21.3.1

$\hookrightarrow e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}$ Lsgn. von $\otimes_b$, $\lambda_0 = -\frac{a}{2}$

Zu 4.): Kettenlinie: Aufhängepunkte R, Q, Seillänge L geg.



bel. Pkt. $P = (x, y)$ der Kurve, α = Steigung in P

• Wenn das Seil ruht, ist Horizontalspannung überall gleich, etwa $= H$

• Vertikalspannung = Seilgewicht zw. S und P
 $= \underbrace{\delta \cdot s}_{\substack{\uparrow \\ \text{Seilgewicht pro Längeneinheit}}} \cdot \text{Bogenlänge der Kurve von S nach P}$

erhalten: $y' = \tan \alpha = \frac{\delta s}{H} \quad \sim \quad y'' = \frac{\delta}{H} \cdot \underline{s'(x)},$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$\uparrow$
 $s'(x)$

Bogenlängenformel: $(s')^2 = 1 + (y')^2 \rightarrow$ s. Aha III

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$
sind Aufhängepunkte

$$\rightarrow y'' = \underbrace{\frac{\delta}{H}}_{\text{Vorfaktor}} \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \quad \text{DGL der Kettenlinie}$$

Lsg.: an 20, wo $\frac{\delta}{H} = 1$

Allg.-Lsg. nach Bsp. 20.4: $y(x) = \cosh\left(\frac{\delta}{H} \cdot x + c\right) + d, \quad c, d \in \mathbb{R}$

$$(\cosh)'' = \cosh$$

- 5 - Bew.:

$$\cosh \stackrel{\downarrow}{=} (\cosh'') \stackrel{\text{DGL}}{\downarrow} = \sqrt{1 + \sinh^2} \quad (\Rightarrow) \cosh^2 \stackrel{\downarrow}{=} - \sinh^2 = 1$$

Add. thm. für cosh/sinh

(vgl. mit : $\cos^2 + \sin^2 = 1$)
