Tutorium zur Analysis II, Nr. 13

Themen:

✓ 1. Bsp. für Systeme für DGL

✓ 2. Lsg. für n-dim. Lsg. raum der homogenen DGL

✓ 3. Bsp. für Euler-homogene DGL / TdV

✓ 4. Komplexe Lsg. ⇝ Reelle Lsg.

✓ 5. Begr. für lin. unabh. der homogenen Lsg.funktionen im Fundamentalsystem

Zu 1.): System von DGL von 1. Ordnung:

$$y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$ seien die Komp. fktn. $y_1, \dots, y_n$ stetig db.

Notation:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}\right\} \iff y' = f(x, y),$$

wo $f: \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$(x, y) \mapsto f(x, \underset{\uparrow}{y}) = \underline{\underline{f(x, y_1, \dots, y_n)}}$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Bsp.:

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= \overset{\text{Inhomogen!}}{2x} + 3y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= 3x - y_1 - 5y_2 \end{aligned}\right\}$$

DGL-System 1. Ordnung mit 2 Glgn., explizit, da $y' = f(\dots)$ dasteht

$\Updownarrow$

$$\boxed{y' = Ay + g(x)},$$

wo $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$,

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $g(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3x \end{pmatrix}$,

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

[implizite DGL: $0 = F(x, y, y')$

Konkretes Bsp.: $0 = y'y - x\sin(x, y', y)$]

⇝ vgl. impl. Fkt. satz: $F(x, y) = 0$

⇝ zugeh. homogenes DGL-System: $\underline{\underline{y' = Ay}}$,

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Bsp.: $u'' + au' + bu = f$ (*), $a,b \in \mathbb{R}$

Subst.: $y_1 = u$, $y_2 = y_1' = u'$ $\rightsquigarrow$ $y_2' = u'' \overset{(*)}{=} -au' - bu + f$
$= -ay_2 - by_1 + f$

$\rightarrow$ DGL 1. Ordnung, 2 DGLn $\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1' = \quad\quad y_2 \\ y_2' = -by_1 - ay_2 + f \end{array} \right\} \iff \left\{ y' = Ay + g \right.$

wo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, $g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$

Zu 2.): Satz 21.24: Jede Lsg. von $(*)_h$ $\ulcorner \varphi(D)u = 0 \lrcorner$ lässt sich in eind. Weise als LK von $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^{r-1}e^{\alpha x}$, wo α alle Nst. von φ durchläuft.

Zur Beweisskizze in 21.26: $\mathfrak{N} := \{ u \in C^\infty(J, \mathbb{C}) ; \varphi(D) = u = 0 \}$.

Idee:
$$\varphi(T) = \prod_{j=1}^{s} (T - \lambda_j)^{r_j} \quad \text{nach Hauptsatz der Algebra.}$$
die $\lambda_j \in \mathbb{C}$,

$$\rightsquigarrow \varphi(D) = \prod_{j=1}^{s} (D - \lambda_j)^{r_j}$$

$$\hookrightarrow \boxed{(D - \lambda_j)^{r_j} u_j = 0,} \quad (\#), j = 1, \dots, s.$$

wo $u_j = q_j(D) p_j(D) u$, q_j Polynome mit $\frac{1}{\varphi(T)} = \frac{q_1(T)}{(T-\lambda_1)^{r_1}} + \dots + \frac{q_s(T)}{(T-\lambda_s)^{s}}$,

und $p_j(T) = \frac{\varphi(T)}{(T-\lambda_j)^{r_j}}$.

3. Schritt im Bew.: sind Lsg. von (#)

5. Schritt: Dimensionsüberlegung: $1 \le j \le s \rightsquigarrow \mathcal{L}_j := \{ v_j \in C^\infty ; (D - \lambda_j)^{r_j} v_j = 0 \}$.

Haben: $\dim \mathcal{L}_j = r_j$, haben Isom. $\mathfrak{N} \cong \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_s$, $u \mapsto u_1 + \dots + u_s$ wie oben

$\rightsquigarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{N} = \dim \mathcal{L}_1 + \dots + \dim \mathcal{L}_s = r_1 + \dots + r_s = \deg \varphi = m.$

Zu 3.): Bsp. für Euler-homogene DGLn:

Typ s. 19.7: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Rezept: Subst. $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$

$\rightsquigarrow f(u) = y' = u \cdot 1 + xu'$

$\Leftrightarrow u' = \frac{f(u) - u}{x}$ Trennung der Variablen

Bsp.: $y' = \frac{y+x}{y-x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kürze } x}}{=} \frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ wo $f(t) = \frac{t+1}{t-1}$

Lsg.: Subst. $u = \frac{y}{x} \rightsquigarrow u' = \frac{f(u)-u}{x} = \frac{\frac{u+1}{u-1} - u}{x}$

$\Leftrightarrow xu' = \frac{u+1}{u-1} - u = \frac{u+1}{u-1} - \frac{u(u-1)}{u-1} = -\frac{u^2-2u-1}{u-1}$

TdV $\rightsquigarrow$ $\Leftrightarrow \underbrace{\frac{u-1}{u^2-2u-1} \cdot u'}_{\text{alles mit } u} = \underbrace{-\frac{1}{x}}_{\text{alles mit } x}$

$$\int^u \frac{u-1}{u^2-2u-1}\, du = -\int^x \frac{dx}{x}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \underbrace{u^2 - 2u - 1}_{\text{innere Abl. ist } 2u-2 = 2(u-1)} \right| = -\ln|x| + C_1$

Kriegen: $u^2 - 2u - 1 = e^{-2\ln(x) + C_1} \underset{\substack{\uparrow \\ e^{C_1} = C_2' \\ 0 \leq x > 0}}{=} C_2' \cdot \underbrace{e^{-2\ln(x)}}_{= e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}}$

erhalten

$(y = ux) \rightarrow \frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1 = C_2' \cdot \frac{1}{x^2}$

$u = \frac{y}{x}$

$\Leftrightarrow \underbrace{y^2 - 2xy - x^2}_{} = C_2$ ← Best.glg. für y, ist implizit

pq-Formel

$\rightsquigarrow y_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + x^2} = x \pm x\sqrt{2} = x(1 \pm \sqrt{2})$

$\Leftrightarrow (y - x(1+\sqrt{2})) \cdot (y - x(1-\sqrt{2})) = C_2$

$\rightsquigarrow$ Für $C_2 = 0$ erhalten wir die speziellen Lsgn. $y = x(1 \pm \sqrt{2})$.

✓

Zu 4.): Bsp.: $\varphi(D)u = 0$,

$$\varphi(X) = (X-3)^2 \underbrace{(X-i)^5 \cdot (X+i)^5}_{=(X^2+1)^5} \in \mathbb{R}[X]$$

Komplexes Fund.system ist: $e^{3x}, \; x e^{3x}$

$$\rightarrow \begin{cases} e^{ix}, \; x e^{ix}, \; x^2 e^{ix}, \ldots, x^4 e^{ix} \\ e^{-ix}, \; x e^{-ix}, \; x^2 e^{-ix}, \ldots, x^4 e^{-ix} \end{cases}$$

Euler: $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

$\leadsto$ Reelles Fund. system ist:

$e^{3x}, \; x e^{3x}$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos(x), \; x\cos(x), \; x^2\cos(x), \ldots, x^4\cos(x) \\ \sin(x), \; x\sin(x), \; x^2\sin(x), \ldots, x^4\sin(x) \end{cases}$$

reelle Fktn.

$$a e^{ix} + b e^{-ix} = a(\cos(x) + i\sin(x)) + b(\cos(x) + i\sin(-x))$$

$$= (a+b)\cos(x) + \underbrace{i(a-b)}_{\in\mathbb{C}}\sin(x)$$

$$= A\cos(x) + iB\sin(x), \quad \begin{pmatrix} A = a+b \\ B = a-b \end{pmatrix}$$

Haben $P\cos(x) + Q\sin(x) = p\, e^{ix} + q\, e^{-ix}$

falls $P, Q \in \mathbb{R}[X]$

wo $p = \frac{1}{2}(P - iQ), \; q = \frac{1}{2}(P + iQ) \in \mathbb{C}[X]$

Zu 5.): Bem.: $\underbrace{x\cos(x)}_{v_1}$, $\underbrace{\sin(x)}_{v_2}$ lin. unabh. Fktn. in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) = V$.
denn $\underline{0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2} \Rightarrow 0 = \alpha_1 x\cos(x) + \alpha_2 \sin(x)$,
gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Speziell $x = \pi$ liefert: $0 = -\alpha_1 \pi + 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$.

Haben dann: $0 = \alpha_2 \sin(x)$.

speziell $x = \frac{\pi}{2}$ liefert: $0 = \alpha_2 \cdot 1 = \alpha_2$.

Also: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Schluss: $v_1 = x\cos(x)$, $v_2 = \sin(x)$ sind in V linear unabh. $\square$