

Tutorium zur Analysis II, Nr. 2

- ✓ ① partielle Diff'barkeit zeigen
- ✓ ② verschiedene Ableitungs "sorten"
- ✓ ③ Abl. bilden, etwas schwieriger
- ✓ ④ Jacobi-matrix
- ✓ ⑤ Fälle $m=1, n>1, m=1, n>1 \rightarrow f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\rightarrow$ Komponentenfkt.

Zu ②: Geg: $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in U \subseteq \mathbb{R}^n, a$ innerer Pkt. von U

i -te partielle Ableitung: Richtungsabl. $D_{e_i} f(a)$
 $(1 \leq i \leq n)$ an Stelle a in Richtung $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ stelle i

Richtungsableitung von f in Richtung $v \neq 0$:

$$D_v f(a) := \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a)) \in \mathbb{R}^m$$

$\uparrow$
 $g(t) = \{a + tv; t \in \mathbb{R}\}$ ist
 die Gerade durch a in Richtung v

Wann ist f partiell diff'bar (für alle) in a ?

Wenn $D_{e_i} f(a)$ bildbar / ex. für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

• Einfaches Bsp.: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + 3y^4 + xy + 1, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 Sei $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $n=2$

$$\text{Also } D_1 f(a) = D_{e_1} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + te_1) - f(a)) = \dots$$

$$\text{denn } \frac{1}{t} (f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) - f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})) = \frac{1}{t} (f(\begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \end{pmatrix}) - f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})) = \frac{1}{t} ((2+t)^2 + 4(2+t)^4 + (2+t) + 1 - (2^2 + 4 \cdot 2^4 + 2 + 1))$$

-2-

Haben: $D_1 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + 3y^4 + xy + 1) = 2x + y$

$$D_2 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + 3y^4 + xy + 1) = 12y^3 + x$$

Für $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $D_1 f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2 \cdot 2 + 1 = \underline{\underline{5}}$, $D_2 f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 12 \cdot 1^3 + 2 = \underline{\underline{14}}$

Zu ①: Tipp für A2 B.3:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^3} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , x = y = 0 \leftarrow a = 0 \end{cases}$$

Beh.: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ partiell diff'bar.

Bew.: Sei $a = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Dann ist $D_1 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{y \cdot (x^2 + y^2)^3 - xy \cdot 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^6}$

$$D_2 f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{x \cdot (x^2 + y^2)^3 - xy \cdot 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^6}$$

in $a = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq 0$ haben wir also $D_1 f\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) = \frac{y_0 \cdot (x_0^2 + y_0^2)^3 - x_0 y_0 \cdot 3(x_0^2 + y_0^2)^2 \cdot 2x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^6}$

$$D_2 f\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right) = \frac{x_0 \cdot (x_0^2 + y_0^2)^3 - x_0 y_0 \cdot 3(x_0^2 + y_0^2)^2 \cdot 2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^6}$$

Die partiellen Abl. ex. in allen $a \neq 0$.

• Für $a = 0$ haben wir

$$\frac{1}{t} (f(a + te_1) - \underbrace{f(a)}_{=0}) = \frac{1}{t} \cdot \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right)}_{\neq 0} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t \cdot 0}{(t^2 + 0^2)^3} = 0,$$

also $D_1 f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} '' = 0$.

Weiter $\frac{1}{t} (f(a + te_2) - \underbrace{f(a)}_{=0}) = \frac{1}{t} \cdot \underbrace{f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}\right)}_{\neq 0} = \frac{1}{t} \cdot \frac{0 \cdot t}{(0^2 + t^2)^3} = 0,$

also $D_2 f(0) = \lim '' = 0$.

Also ex. auch die partiellen Abl. in $a = 0$.

□

-3-

0, 0, 0
Null-vektor, Null-matrix

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m, U \subseteq \mathbb{R}^n$$

$a \in U$ im. Pkt.

Nach zu ②: (Totale) Diff'barkeit:

Abl. von f in a ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
m Zeilen, n Spalten

nämlich: affin-linear in $x \in U$

$$f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + \underbrace{o(\|x-a\|)}_{\varphi(x)},$$

wobei $\frac{\varphi(x)}{\|x-a\|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Dann: $f'(a) = A$.

$\varphi(x) = o(\dots)$ ist nur Symbol für
"klein Oh" die Eigenschaft
($0 \neq$ Nullvektor)

Bsp.: $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1, f(x) = x^3, a = 1,$

hier: $f(x) = f(a) + A \cdot (x-a) + o(\|x-a\|)$ ← multidim. Version

mit $x^3 = 1^3 + \underbrace{f'(1)}_{\uparrow} \cdot (x-1) + o(|x-1|)$ ← 1-dim. Version

$$x^3 = 1 + 3(x-1) + \underbrace{o(|x-1|)}_{=\varphi(x)}$$

Wissen: $f'(1) = 3 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$.

mit $\varphi(x) = x^3 - 1 - 3(x-1)$ als Restterm.

Beh.: $\varphi(x) = o(|x-1|)$.

Bew.: $\frac{\varphi(x)}{|x-1|} = \frac{x^3 - 1 - 3(x-1)}{x-1} = \underbrace{x^2 + x + 1}_{\text{geom. I.}} - 3 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3 - 3 = 0 \checkmark$
 $\uparrow$ $\forall x > 1$

-4-

Zu ③: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 + 3y^4 + xy + 1 \\ xy^2 + 3 - \sin(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Ist f diff'bar? (Bislang) nur über Def.

bzw. falls $f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ und $f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ diff'bar.

Ist das hier so? Haben: $f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x^2 + 3y^4 + xy + 1$, $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xy^2 + 3 - \sin(y), \quad f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

dies sind die beiden Komponentenfunktionen.

Sind f_1, f_2 beide partiell diff'bar? Ja:

$$D_1 f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2x + y, \quad D_2 f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 12y^3 + x$$

$$D_1 f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = y^2, \quad D_2 f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2xy - \cos(y).$$

Haben Jacobi matrix:

$$\left(D_i f_j\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} = \begin{pmatrix} \overset{D_1 f_1}{\downarrow} 2x+y & \overset{D_2 f_1}{\downarrow} 12y^3+x \\ y^2 & 2xy - \cos(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

falls f diff'bar in $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ist $Df\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f'\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+y & 12y^3+x \\ y^2 & 2xy - \cos(y) \end{pmatrix}$,

z.B. $f'(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}) = \begin{pmatrix} -2+0 & 12 \cdot 0 - 1 \\ 0 & 0 - \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$

Bem.: Spalten sind die partiellen Ableitungen von f
Zeilen sind die Ableitungen der Komponentenfunktionen $f_i'\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

-5-

zu (5): $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$n=1: f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \leadsto \underline{f'(a)} \in \mathbb{R}^{m \times 1} \cong \mathbb{R}^m$$

affin-lineares Bsp: $t \mapsto b + t \cdot v$, $b, v \in \mathbb{R}^m \leadsto \underline{f'(t) = v}$
(vgl. $y = b + x$ in Geradenglg.)

$n > 1$: schwieriger, haben $n > 1$ viele Variablen

$\rightarrow$ Betr. $\mathbb{R}^m = 1$: denn wir können $\mathbb{R}$ die Komponentenfkt. $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ betr.

$$\mathbb{R} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \leadsto f'(a) = (D_1 f(a), D_2 f(a), \dots, D_n f(a)) \in \mathbb{R}^{1 \times n}, \text{ d.h. eine Zeile}$$

heißt Gradient von f an der Stelle a

$n > 1$: $\rightarrow$ Betr. Komponentenfkt. $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, wo $n=1$ wie eben

Ist $f'(a) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bekannt,

kann man für eine Richtung $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die

Richtungsabl. leicht berechnen mit

$$D_v f(a) = f'(a) \cdot v$$

$$\text{Bsp. bei (3): } f'(-1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ geg. Dann } f'(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}}}.$$