

Tutorium in Analysis II, Nr. 3

Themen:

- ✓ ① Bsp. zu Gradienten / Tangentialebene
- ✓ ② Bsp. zu totaler Ableitung $\leadsto$ o-Nachweise
- ✓ ③ Bsp. zu G. 8 (stetig diff'bar).
- ✓ ④ Kettenregel

Zu ①: Gradient = Abl. eines Skalarfeldes

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1, \text{ dann } f'(a) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \\ \text{und } \text{grad } f(a) = f'(a)^T \in \mathbb{R}^n$$

1) Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + 3y^4 + xy + 1$

Dann: $|\text{grad } f(x, y)|^T = f'(x, y) = (2x + y, 12y^3 + x)$.

Sei $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dann $\text{grad } f(a)^T = (4, 12 \cdot 0^3 + 2) = (4, 2)$.
 $\leadsto f(a) = f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^2 + 3 \cdot 0^4 + 2 \cdot 0 + 1 = \underline{\underline{5}}$

Dann: wissen: f ist in a total abh. mit Abl. $f'(a)$,

denn die partiellen Abl. $D_1 f(x, y) = 2x + y$, $D_2 f(x, y) = 12y^3 + x$ sind stetig! (s. Vorl.)

Somit ist: $f(\vec{x}) = f(a) + \underbrace{f'(a) \cdot (\vec{x} - a)}_{\substack{\text{Linearisierung} \\ \hookrightarrow \text{Tangente}}} + \underbrace{o(\|\vec{x} - a\|)}_{\text{Rest klein}}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

bzw. $f(v) = f(a) + f'(a) \cdot (v - a) + o(\|v - a\|), \quad v \in \mathbb{R}^2, \quad v \text{ nahe } a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tangentialebene von f im Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$:

$z = f(a) + \langle \text{grad } f(a), v - a \rangle$, schreibe $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nahe a

$\Leftrightarrow z = 5 + \langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$\Leftrightarrow z = 5 + 4 \cdot (x - 2) + 2 \cdot y \Leftrightarrow \underline{\underline{4x + 2y - z = 3}}$

-2-

Ergebnis: tangentielle Ebene: $T_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 4x + 2y - z = 3 \right\}$.

Normalenvektor: $n_{T_a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) Bsp.: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$, Graph: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ f(x,y,z) \end{pmatrix}; x,y,z \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

$$f(x,y,z) = \underline{x^2 y z} + \underline{x y^2 z} + \underline{x y z^2}, \quad a = \sigma$$

Sei $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

→ $Df(v) = (2xy z + y^2 z + y z^2, \quad x^2 z + 2xy z + x z^2, \quad x^2 y + x y^2 + 2x y z)$,
insb. ist f in $a = \sigma$ diff'bar, da die partiellen Abl. stetig.

$$\text{Approx.: } \underline{\underline{f(v)}} = \underbrace{f(\sigma)}_{=0} + \underbrace{Df(\sigma) \cdot v}_{=0 \cdot v = 0} + o(\|v\|)$$

Tangentialebene: $m = 0$

$$\text{Also: } T_\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}; x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \{w \in \mathbb{R}^4; \text{pr}_4(w) = 0\}$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ m \end{pmatrix}; x,y,z \in \mathbb{R}, \underline{\underline{m=0}} \right\}$$

$$\text{Normalenvektor: } n_{T_\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp T_\sigma,$$

$$\text{denn } m=0 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 1 \cdot m = 0$$

Zu ②: σ -Nachweise / totale Ableitung:

Bsp:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x, y, z) = x^2 y z + x y^2 z + x y z^2, \quad a = \sigma$$

$$\text{Sei } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$Df(v) = (2xy z + y^2 z + y z^2, \quad x^2 z + 2xy z + x z^2, \quad x^2 y + x y^2 + 2xy z).$$

Prüfen die Diff'barkeit an der Stelle $a = \sigma$:

$$\text{z.z.: Approx.: } \underline{f(v)} = \underline{f(\sigma)} + \underline{Df(\sigma) \cdot v} + r(v), \quad r(v) = o(\|v\|)$$

$$\rightarrow r(v) = f(v) - x^2 y z - x y^2 z - x y z^2$$

$$\text{Beh.: } r(v) = o(\|v\|_\infty), \quad \text{wo } \|v\|_\infty = \max(|x|, |y|, |z|),$$

$$\text{wenn } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\text{Bew.: } \frac{|r(v)|}{\|v\|_\infty} = \frac{|x^2 y z + x y^2 z + x y z^2|}{\|v\|_\infty} = \frac{|x^2 y z + x y^2 z + x y z^2|}{|x|}$$

$$\stackrel{\text{O.E. sei}}{\uparrow} \quad |x| = \|v\|_\infty$$

$$\leq \frac{|x|^4 + |x|^4 + |x|^4}{|x|} = 3|x|^3 \xrightarrow{v \rightarrow \sigma} 0.$$

Δ -Kugl.

in $\|\cdot\|$,
d.h. dann, dass

$$|x|, |y|, |z| \rightarrow 0, \text{ bzw. } x, y, z \rightarrow 0$$

□

Bsp.: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x) \sin(y)$, $a=0$.

$\rightarrow$ Jacobimatrix: $Df(\overset{=0}{y}) = (\cos(x) \sin(y), \sin(x) \cos(y))$.

$$Df(0) = Df(0) = (0,0) = 0.$$

Beh.: f in ist $a=0$ diff'bar, $f'(a) = Df(0) = 0$.

Bew.: Approx.: $f(v) = \overset{=0}{f(0)} + \overset{=0}{Df(0)} \cdot v + r(v)$,

Beh.: $r(v) = o(\|v\|_\infty)$, d.h. $\frac{r(v)}{\|v\|_\infty} \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0$.

Hier: $r(v) = f(v) = \sin(x) \sin(y)$,

$$\text{also } \frac{r(v)}{\|v\|_\infty} = \frac{\sin(x) \sin(y)}{|x|} = \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} \cdot \underbrace{\sin(y)}_{\substack{\text{beschränkt} \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}} \xrightarrow[\|v\|_\infty]{|x| \rightarrow 0} 0$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de l'H}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Zu (3): Bsp. zu 6.8, gesucht: nicht stetig diff'bare Fkt.,
wo alle partiellen Abl. ex., aber nicht stetig

z.B.:

Aufg. 2, Bl. 3: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ stetig

Beh.: f ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell diff'bar,

$\rightarrow$ d.h. $D_1 f(\overset{x}{y}), D_2 f(\overset{x}{y})$ ex. $\leftarrow$ nicht stetig!

Aber: f ist nicht stetig in $(0,0)$,

d.h. f ist auch nicht diff'bar in $(0,0)$.

Andres Bsp.:
Bl. 4, Aufg. 5

Zu ①: Kettenregel: $\begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ \cup \\ U \end{matrix} \xrightarrow{f} \begin{matrix} \mathbb{R}^m \\ \cup \\ U \end{matrix} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$, $a \in U$ innerer Pkt., f, g diff'bar.

Dann: $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$

$\underbrace{\in \mathbb{R}^{k \times m}}_{\text{äußere Abl.}} \quad \underbrace{\in \mathbb{R}^{R \times m}}_{\text{äußere Abl.}} \quad \underbrace{\in \mathbb{R}^{m \times m}}_{\text{innere Abl.}}$

Bsp.: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xy^2$, $g(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ -t^2 \\ t+t^2 \end{pmatrix}$

$\leadsto g \circ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} xy^2+1 \\ -x^2y^4 \\ xy^2+x^2y^4 \end{pmatrix}$. $a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Haben: $Df\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (y^2, 2xy)$, $Dg(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \\ 1+2t \end{pmatrix}$

$D(g \circ f)(a) \stackrel{\text{K.R.}}{=} Dg(\underbrace{xy^2}_{=t}) \cdot Df\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2xy^2 \\ 1+2xy^2 \end{pmatrix} \cdot (y^2, 2xy)$

$= \begin{pmatrix} 1 \cdot y^2 & 2xy \\ -2xy^2 & -4x^2y^3 \\ y^2+2xy^2 & 2xy+4x^2y^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

Bsp.: $x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $f(x) = (x, 2x^2, \sqrt{x})^T$, $g(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$

$Df(x) = (1, 4x, \frac{1}{2\sqrt{x}})^T$, $Dg(x, y, z) = (\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(yz)^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}y^{\frac{2}{3}}(xz)^{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}(xy)^{\frac{1}{3}})$

$D(g \circ f)(x) \stackrel{\text{K.R.}}{=} Dg(\underline{f(x)}) \cdot Df(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}(yz)^{\frac{1}{3}}, y^{\frac{2}{3}}(xz)^{\frac{1}{3}}, z^{-\frac{2}{3}}(xy)^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4x \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix}$

mit $y=2x^2, z=\sqrt{x}$

$= \frac{1}{3} \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}(2x^2)^{\frac{1}{3}} + 4y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}z^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}z^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3}(\dots) \in \mathbb{R}$

nach einsetzen: $y=2x^2, z=\sqrt{x}$

x-Exponent: $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$