Tutorium zur Analysis II, Nr. 4

Themen:

✓ (1) Bsp. Extrema ← Hessematrix
✓ (2) Bsp. Taylor bis Ordnung 2
✓ (3) "Krit. Stellen" / Kandidat-Stellen für Extrema → singuläre Stellen, d.h. Stellen, wo f nicht db; → Krit. Stellen; → Randpunkte
(4) offene Menge ⇝ s. Teil 2 der Vorl. an 11 - an 13

Zu (1): 1. Krit. Stellen (part. Abl. 1. Ordnung Nullsetzen)
2. Hessematrix (" " 2. " betrachten)

Bezeichnungen: $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}_a$

f hat in a lok. $\begin{Bmatrix} \text{Min.} \\ \text{Max.} \end{Bmatrix} :\Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}_a : f_{|U} \begin{Bmatrix} \geq f(a) \\ \leq f(a) \end{Bmatrix}$

global: $U = \mathcal{D}$

zu (3):

1. Krit. Stelle: Existieren $D_i f(a)$ für alle $1 \leq i \leq n$,
   - so heißt a krit. Stelle von f, falls alle $D_i f(a) = 0$
   - und hat f in a ein Extremum, so ist a krit. Stelle
2. Hessematrix: $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, $a \in \mathcal{D}$ krit. Pkt.,

   sei $H(f; a) = \left(D_i D_j f(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} D_1^2 f(a) & D_1 D_2 f(a) & \dots & D_1 D_n f(a) \\ D_2 D_1 f(a) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ D_n D_1 f(a) & \dots & \dots & D_n^2 f(a) \end{pmatrix}$

   Kriterium: ist $H(f; a)$ $\begin{Bmatrix} \text{neg} \\ \text{pos.} \end{Bmatrix}$ definit, dann hat f in a lok. $\begin{Bmatrix} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{Bmatrix}$

Bsp. (a): $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 \sin y - e^y x$

Part. Abl.: $D_1 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x \sin y - e^y \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2x \sin y = e^y \neq 0$ ($x \neq 0$)

$D_2 f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 \cos y - e^y x \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 \cos y = e^y x$

$\Leftrightarrow x \cos y = e^y = 2x \sin y$

$\Leftrightarrow \cos y = 2 \sin y$

$\dots$? ?

Krit. stellen?

vermutlich Keine !? Jedenfalls Kompliziert!

<u>Bsp. (b)</u>: $f : \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) ; x=0 \vee y=0\}}_{=:D} \to \mathbb{R}$, $f\binom{x}{y} = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$, $x \neq 0 \neq y$

- Partielle Abl. erster Ordnung: $D_1 f\binom{x}{y} = y - \frac{64}{x^2}$
  $\to$ $D_2 f\binom{x}{y} = x - \frac{64}{y^2}$ $\Big\}$ sind stetig (in D), d.h. f ist stetig diffbar

- Bestimme krit. Pkte von f: $D_1 f\binom{x}{y} \stackrel{!}{=} 0 \iff y = \frac{64}{x^2} \iff yx^2 = 64$
  $D_2 f\binom{x}{y} \stackrel{!}{=} 0 \iff x = \frac{64}{y^2} \iff xy^2 = 64$

  also $\frac{x}{y} = \frac{yx^2}{xy^2} = 1$, also $x = y$,
  und $x^3 = 64$, also $\underline{\underline{x = 4 = y}}$.

  Ergebnis: $a = (4,4)$ ist einziger krit. Pkt.

- Die Hessematrix ist $H(f; x) = \begin{pmatrix} D_1^2 f\binom{x}{y} & D_1 D_2 f\binom{x}{y} \\ D_2 D_1 f\binom{x}{y} & D_2^2 f\binom{x}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cdot 64}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2 \cdot 64}{y^3} \end{pmatrix}$,

  Schwarz $\Rightarrow D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$, da stetig diffbar in D

  also $H(f; a) = H\left(f; \binom{4}{4}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

  Hauptminorenkrit. anwenden: $\det \boxed{2} > 0$
  und $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

  $H(f; a)$ ist also pos. definit

  Ergebnis: $a = \binom{4}{4}$ ist Minimalstelle,
  und $f(a)$ ist lokales striktes Minimum, hier $f\binom{4}{4} = \underbrace{4 \cdot 4}_{=16} + \underbrace{\frac{64}{4}}_{16} + \underbrace{\frac{64}{4}}_{16} = 3 \cdot 16 = \underline{\underline{48}}$

Hier: Taylor-entw. bis Ordnung 2: $\underset{x \in \mathbb{R}^2}{f(x)} = f(a) + \underline{\langle \operatorname{grad} f(a), x - a \rangle} + \frac{1}{2} (x-a)^T H(f; a)(x-a)$ + Terme ...

im Bsp.(b): $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}$, $D_1 f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = y - \frac{64}{x^2} \rightsquigarrow D_1 f\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = 0$

$a = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$ $\qquad D_2 f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x - \frac{64}{y^2} \rightsquigarrow D_2 f\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = 0$

$f(a) = 48$ $\qquad$ und $H(f;a) = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$

Somit ist die Taylorentw. hier:

$$f(v) = 48 + 0 + \frac{1}{2}\cdot\left(v - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right)^T \cdot \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\cdot\left(v - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right), \quad v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 48 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix}^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-4\\y-4\end{pmatrix}}$$

$$= 48 + \frac{1}{2}(x-4, y-4)\cdot\begin{pmatrix}2\cdot(x-4) + 1\cdot(y-4)\\ 1\cdot(x-4) + 2\cdot(y-4)\end{pmatrix}$$

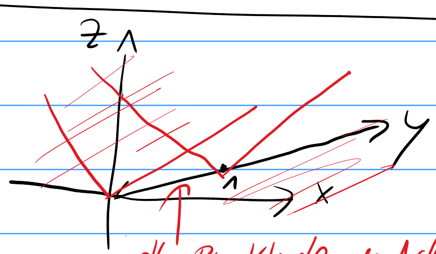
$$= 48 + \frac{1}{2}\cdot\Big[(x-4)\cdot\big(2(x-4) + 1(y-4)\big) + (y-4)\cdot\big((x-4) + 2(y-4)\big)\Big]$$

$$= 48 + \frac{1}{2}\Big[2(x-4)^2 + 2(x-4)(y-4) + 2(y-4)^2\Big]$$

$$= 48 + (x-4)^2 + (x-4)(y-4) + (y-4)^2 .$$

Ergebnis: Dies ist das Taylorpolynom der 2. Ordnung ($\leq$ Grad 2 - Terme) von f in $a = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$

Bsp.(c): $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$f(x,y) = |x|$



alle Punkte der y-Achse sind singulär, d.h. f ist dort nicht diff'bar!

In jedem Punkt der y-Achse gibt es ein globales Minimum, Wert ist jeweils 0, denn $f(0,y) = |0| = 0$
und ist Min., denn $f(x,y) = |x| \geq 0 = f(0,y)$.

Weiteres Bsp. für Extrema:

Bsp.(d): $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\binom{x}{y} = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$ $\rightsquigarrow \deg f = 4$

1. Beh.: f hat auf allen Geraden durch $(0,0)$ ein Minimum
2. Beh.: $(0,0)$ ist nicht lokales Minimum!

Bew.: Zu 1. Beh.: Betr. $g(t) := f\binom{tx}{ty}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Gerade durch $(0,0)$ und $\binom{x}{y}$ ist $\{t \cdot \binom{x}{y}; t \in \mathbb{R}\}$.

Haben: $g(t) = 2(tx)^2 - 3 \cdot tx \cdot (ty)^2 + (ty)^4$
$= 2t^2x^2 - 3t^3xy^2 + t^4y^4$

Extrema von g: $g'(t) \overset{!}{=} 0 \to t^2(2x^2 - 3txy^2 + t^2y^4) = 0$
$\rightsquigarrow g'(0) = 0$, $t_0 = 0$
und $g''(0) = 4x^2 > 0 \to$ Min. (falls $x \neq 0$)
$\rightsquigarrow t_0 = 0$ ist Minimalstelle von g ✓ Aber: Auch für $x=0$ hat $g(t) = t^4y^4$ ein Min. in $t_0 = 0$ ✓

Zu 2. Beh.: $f\binom{x}{y} = 2x^2 - 3xy^2 + y^4 = (y^2 - x) \cdot (y^2 - 2x)$ ✓ ✓ ✓ ✓ $\boxed{\text{versch. VZ sind möglich!}}$

hat in $(0,0)$ kein lokales Minimum,

denn $f\binom{x}{0} = (-x) \cdot (-2x) = 2x^2 \geq 0$ für x nahe 0,

und $f\binom{x}{x} = (x^2 - x)(x^2 - 2x) = x^2 \underbrace{(x-1) \cdot (x-2)}_{<0} < 0$

für $x \in]1, 2[$

aber: ist nicht nahe $(0,0)$!

Haben: $f\binom{x}{ax} = (a^2x^2 - x) \cdot (a^2x^2 - 2x) = x^2(a^2x - 1) \cdot (a^2x - 2) < 0$

für $a^2x \in]1, 2[$, wo $a > 0$

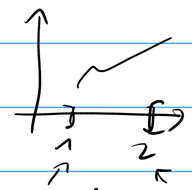
bzw. $x \in]\frac{1}{a^2}, \frac{2}{a^2}[$ d.h. $\frac{1}{a^2}$ kann bel. klein sein

nahe $(0,0)$, nämlich in $\begin{pmatrix} \frac{1.5}{a^2} \\ \frac{1.5}{a} \end{pmatrix}$, $a > 0$ beliebig groß

$\square$

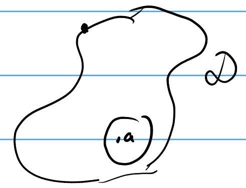
Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$

Frage: Was sind Randpunkte?



Das offene IV $]1,2[$ hat die Randpunkte 1 und 2.

Bsp.: $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$:



$\mathcal{D}$ offen heißt:

$$\forall a \in \mathcal{D}\ \exists U \in \mathcal{U}_a : U \subseteq \mathcal{D}$$

$$\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{D}\ \exists \varepsilon > 0 : U_a^\varepsilon \subseteq \mathcal{D},$$

wobei $U_a^\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^n ;\ \|x - a\|_2 < \varepsilon \}$ ← (egal, welche Norm man festlegt)

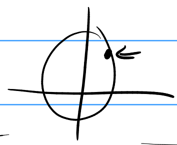
Sei $f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ geg.

Konkretes Bsp.: $U = \left\{ \binom{x}{y} ;\ \left\| \binom{x}{y} - \binom{0}{0} \right\|_2 < \varepsilon \right\} \subset \mathbb{R}^2$

$$= \left\{ \binom{x}{y} ;\ \underbrace{\left\| \binom{x}{y} \right\|_2}_{\sqrt{x^2+y^2}} < \varepsilon \right\} \Leftrightarrow \left\{ \binom{x}{y} ;\ x^2 + y^2 < \varepsilon^2 \right\}$$

Kugel vom Radius ε

Randpunkte hier: $E = \left\{ \binom{x}{y} ;\ x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$, E ist der Rand von U



$\rightsquigarrow$ bräuchten $E \subseteq \mathcal{D}$ für Extremaproblematik.

$f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$, kann $f|_{U \cup E}$ Min./Max. haben? Ja, denkbar,

etwa wenn

$$\mathcal{D} = U \cup E = \left\{ \binom{x}{y} ;\ \left\| \binom{x}{y} \right\|_2 \leq \varepsilon \right\}$$

← Aber hier: Ableitungen von f auf Randpunkten nicht bildbar, per Def. von "diff'bar".

Würde $\mathcal{D}$ erweitert werden, etwa um $\mathcal{D} \subseteq U_a^{\varepsilon_1}$, und ebenso $f: U_a^{\varepsilon_1} \to \mathbb{R}$, dann ist die Frage nach Extrema auf $\mathcal{D} \subseteq U_a^{\varepsilon_1}$ wieder mit Differentialrechnung behandelbar.